Formaliser la droite des nombres réels

www.Idenomaths.fr

IdenoMaths

4 juin 2018

Table des matières

Ce document décrit un "schéma mental" spatial des nombres réels compatible avec leur définition formelle axiomatique.

1 Introduction sur le langage adapté à la droite des nombres réels usuelle

Choisissons une droite horizontale passant par une origine O et orientée de "gauche à droite". Plaçons une longueur unité à droite de l'origine. L'origine O correspond au nombre 0. Le point situé à l'extrémité droite de l'unité correspond au nombre 1. L'unité reportée à droite du point "1" identifie un point "2" à son autre extrémité. En divisant plutôt l'unité en deux parties égales, un point "1/2" est identifié au niveau de la séparation des deux parties - entre "0" et "1". En réitérant de tels procédés, différents nombres sont associés à des points le long d'une droite.

Où le nombre est-il représenté ? Le nombre n'est pas représenté dans l'espace physique qui ne contient aucune telle droite. Le nombre est plutôt dans un "modèle de l'espace". Si le "modèle de l'espace" en question apparaît dans l'espace physique - ou du moins dans notre expérience de l'espace physique - , c'est seulement car certaines figures y font référence ou parce que nous comprenons une situation à l'aide de ce modèle. Quel est le "modèle de l'espace" utilisé pour construire la droite des nombres réels ?

Le "modèle de l'espace" utilisé pour construire la droite des nombres réels est celui d'un espace muni de longueurs, directions et orientations. Il n'est constitué que de points séparés par ces trois composantes. A-t-on tout dit ? Pour que la droite de nombres que nous avons commencé à construire devienne une véritable droite des nombres réels, il est nécessaire également que le "modèle de l'espace" autorise une spatialité illimitée. L'espace a naturellement quelques autres propriétés - comme le fait d'être invariable par translation. En particulier, le modèle de l'espace est naturellement plongé dans un espace à trois dimensions qui permet de construire des droites des nombres réels identiques suivant n'importe laquelle de ses directions. Nous appelons "espace euclidien" un tel modèle de l'espace car il convient à la géométrie euclidienne. A noter qu'une telle spatialité est traitée comme une totalité *a priori. A priori* car la spatialité est indépendante de sujets qui l'apprécient (la spatialité existe sans aucun modèle d'un observateur qui l'observe) ; la spatialité est également indépendante d'informations qui la supporte (aucune énergie, état ou événement ne détermine la spatialité). Totalité car lorsqu'un objet "gagne de la spatialité", il détermine sa spatialité comme une partie de la spatialité totale sans la modifier. Autrement dit, la spatialité n'est pas une forme qui épouse et structure le contenu mais est plutôt un plein spatial dont le contenu s'empare. En tout cas, la physique classique fait du modèle de l'espace euclidien une telle spatialité - et des droites des nombres réels se trouvent sur les axes de ses repères. Quoi qu'il en soit, le "modèle de l'espace" utilisé pour construire la droite des nombres réels nous intéresse car il peut modéliser des nombres à partir de points sur une droite. Quel est le modèle des nombres qui est contenu dans une droite des nombres réels ?

Une droite des nombres réels dépend certainement des concepts et compétences mathématiques de celui qui la considère. La droite des nombres réels la plus usuelle se décrit sans doute comme une "figure rectiligne graduable" illimitée. Étudions le modèle des nombres contenu dans un tel objet.

D'abord, la droite des nombres réels usuelle fait coexister les nombres dans un objet qui de façon idéalisé se prolonge à l'infini et contient leur ensemble. Un point est contenu dans la droite qui est l'objet auquel les points appartiennent. La droite usuelle traduit ainsi d'abord la relation d'appartenance

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

(Littéralement : pour tout x un élément appartenant à l'ensemble des nombres réels, x appartient à l'ensemble des nombres réels. La proposition est une tautologie[1] *qui pose la relation d'appartenance)*
D'autres propriétés ensemblistes émergent de la relation des points à la droite. Par exemple, le fait que l'union de plusieurs points est incluse dans la droite correspond naturellement à la propriété que l'union de sous ensembles de $\mathbb{R}$ est incluse dans $\mathbb{R}$. La droite des nombres réels usuelle ne contient-elle que des propriétés relatives aux ensembles ?
Une première famille de propriétés supplémentaire concerne sans doute les longueurs ou extensions qui séparent les points. Le réseau d'extensions séparant les points indique l'existence d'une application d qui a deux nombres réels associe un autre élément (extension). Par suite, l'extension "ressemble" à un nombre réel positif. En effet, notons d'abord que la droite des nombres réels rend un point égal à un nombre. Par suite, le problème de se donner un nombre à partir d'une extension e revient à celui de choisir un point à partir de e. Enfin, pour toute extension e, il suffit de choisir le point obtenu en translatant l'origine par un vecteur d'extension e orienté vers les positifs[2] pour se donner un point (positif) et donc un nombre (positif) correspondant. Ainsi, une extension e qui sépare deux points est "équivalente" à un nombre positif. On aurait alors :

$$\exists d, \forall x, y \in \mathbb{R}^2, d(x,y) \in \{extensions\} \simeq \mathbb{R}^+$$

où $\simeq$ est une certaine relation d'équivalence.
(Il existe une application d telle que pour tout (x,y) couple de deux éléments appartenant à l'ensemble des nombres réels, l'image de (x,y) par l'application d a une valeur dans un ensemble d'extensions qui est équivalent à celui des nombres réels positifs)

Une seconde famille de propriétés supplémentaire s'appuierait plutôt sur l'orientation de la droite. Les nombres progressent de gauche à droite des plus petits aux plus grands. Le phénomène est valable tout le long de la droite et ordonne tout couple de points que l'on peut se donner. Si deux points sont donnés, alors au moins l'un d'eux est à droite de l'autre. On aurait ainsi mathématiquement l'existence d'une "relation d'ordre" $\leq$ telle qu' au moins :

$$\exists \leq, \forall x, y \in \mathbb{R}^2, x \leq y \ ou \ y \leq x$$

1. Proposition toujours vraie quelle que soit la valeur de vérité de ses composants
2. orienté vers la droite

(Il existe une relation binaire $\leq$ telle que pour tout (x,y) couple de deux éléments appartenant à l'ensemble des nombres réels, on a $x \leq y$ (x est plus petit que y) vrai et/ou $y \leq x$ vrai (y est plus petit que x)))

Enfin, une importante famille de propriétés concerne les opérations vectorielles. Spatialement, la somme de deux vecteurs s'obtient en réalisant des transferts d'un point de départ vers un point d'arrivée les uns après les autres. C'est le principe utilisé par exemple pour reporter l'unité à droite d'elle-même et obtenir le point 2 sur la droite des nombres réels usuelle. Tout couple de points peut ainsi être regardé comme un terme de différentes sommes. Quelle structure est obtenue avec la possibilité de sommer les vecteurs ? Les opérations vectorielles déploient sur la droite des graduations qui permettent de repérer tout point au sein d'une grille de valeurs possibles. Mathématiquement, la grille de valeurs possibles pourrait se décrire par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists s \in \{0,1\}, \exists a_0 \in \{0,1,2,...,1000,...\}, \exists b \in \mathbb{N}, b > 1, \exists (a_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \{0,1,...,b-1\}^{\mathbb{N}^*},$$

$$x = (-1)^s(a_0 + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ...) = (-1)^s \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i}{b^i}$$

Pour tout élément x dans l'ensemble des nombres réels, il existe un signe s, il existe un entier naturel a_0, il existe un entier naturel b supérieur à 1, il existe une suite infinie d'entiers a_1,.., a_i , a_{i+1}, ..., - tous compris entre 0 et b-1 - tels que x soit égal au signe multiplié par la somme des quotients a_i divisé par b-à-la-puissance-i lorsque i parcourt les entiers naturels

L'expression décrit un nombre réel comme une "partie entière" a_0 [3] et un développement dans une certaine base b. Par exemple si b = 10, " $a_1 a_2 ... a_i a_{i+1} ...$ " correspond à l'écriture décimale "après la virgule" de x. Le choix d'un entier a_0 s'explique par le fait que l'unité est couramment reportée sur une grille d'entiers qui recouvre la droite des nombres réels. L'unité se divise par suite en b parties égales et le principe permet récursivement d'obtenir un développement dans une certaine base n'importe où ($\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{b^i}$). Géométriquement, le signe est donné indépendamment de ces considérations comme le côté de la droite des nombres réels sur lequel se trouve le point considéré ($(-1)^s$) [4]. Des versions faibles de cette famille de propriétés s'obtiennent en limitant le développement du nombre réel où en utilisant des relations d'approximations. Par exemple, décrivons la "grille" de valeurs possibles d'un double décimètre millimétré

$$\forall x \in \mathbb{R} \cap [0,20], \exists a_0 \in \{0,1,2,...,19\}, \exists a_1 \in \{0,1,...,9\},$$

$$x \simeq a_0 + \frac{a_1}{10}$$

Pour tout élément x dans l'ensemble des nombres réels restreint aux nombres compris entre 0 et 20, il existe un entier a_0 compris entre 0,1, ..., 19 (correspondant au centimètre dans le contexte d'un double décimètre millimétré), il existe un entier naturel a_1 compris entre 0 et 9 (le millimètre dans le contexte d'un double décimètre millimétré) tels que x est approximativement égal à a_0 ajouté à a_1-divisé-par-b=10 ($a_0 + \frac{a_1}{10}$ centimètres dans le contexte d'un double décimètre millimétré)

. Il paraît raisonnable de considérer que toute droite des nombres réels contient une version plus forte de cette grille naïve - s'identifiant éventuellement au développement dans une base quelconque décrit dans le paragraphe précédent.

Les familles de propriétés se complètent enfin en étant compatibles les unes avec les autres puisqu'elles coexistent dans un unique espace euclidien faisant la synthèse des différentes contraintes.

Résumé sur la droite des nombres réels usuelle La droite des nombres réels usuelle, conçue comme une figure rectiligne graduable, exprime l'existence d'un objet $\mathbb{D}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{D}, x \in \mathbb{D}$$

($\mathbb{D}$ est un ensemble)

$$\exists d, \forall x, y \in \mathbb{D}^2, d(x,y) \in \{extensions\} \simeq \mathbb{D}^+$$

($\mathbb{D}$ admet "une distance")

$$\exists \leq, \forall x, y \in \mathbb{R}^2, x \leq y \; ou \; y \leq x$$

3. si x est négatif, a_0 est la partie entière de x plus 1
4. "à droite", "au milieu" ou "à gauche".

($\mathbb{D}$ est "ordonné")

$$\forall x \in \mathbb{D}, \exists s \in \{0,1\}, \exists a_0 \in \{0,1,2,...,1000,...\}, \exists b \in \mathbb{N}, b > 1, \exists (a_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \{0,1,...,b-1\}^{\mathbb{N}},$$

$$x = (-1)^s (a_0 + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ...) = (-1)^s \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i}{b^i}$$

(Les éléments de $\mathbb{D}$ admettent des développements dans des bases arbitraires)

les propriétés sont en outre simultanées et *compatibles* les unes avec les autres. [5]

Première problématique Un élément de l'ensemble $\mathbb{D}$ représente-t-il légitimement un nombre réel ? Un nombre réel est défini comme un élément d'un corps archimédien totalement ordonné et complet ($\mathbb{R}$). Autrement dit, $\mathbb{R}$ satisfait les axiomes suivant :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3, x + (y + z) = (x + y) + z \text{ (+ associative)}$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, x + y = y + x \text{ (+ commutative)}$$
$$\exists 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + 0 = x \text{ (existence d'un élément neutre 0)}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, x + x' = x' + x = 0 \text{ (existence d'un opposé pour tout élément)}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y \text{ (} \leq \text{ antisymétrique)}$$
$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z \text{ (} \leq \text{ transitive)}$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, (x \leq y) \text{ ou } (y \leq x) \text{ (} \leq \text{ totale)}$$
$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2, (x \leq y) \Rightarrow (x + z \leq y + z) \text{ (} \leq \text{ compatible avec +)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \times (y \times z) = (x \times y) \times z \text{ (} \times \text{ distributive)}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, x \times y = y \times x \text{ (} \times \text{ commutative)}$$
$$\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \times 1 = x \text{ (existence d'un élément neutre 1 différent de 0)}$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}, \exists x' \in \mathbb{R}, x \times x' = x' \times x = 1 \text{ (existence d'un inverse pour tout élément non nul)}$$
$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3, x \times (y + z) = x \times y + x \times z \text{ (distributivité de + par rapport a } \times \text{)}$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, (x \leq 0) \text{ et } (y \leq 0) \Rightarrow (x \times y \leq 0) \text{ (} \leq \text{ compatible avec } \times \text{)}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, (0 < x, 0 \leq y) \Rightarrow (\exists b \in \mathbb{N}, y \leq x \times b) \text{ (} \mathbb{R} \text{ est archimedien)}$$

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$
$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}, \exists No \in \mathbb{N}, \forall p > 0, \forall n > No, |x_n - x_{n+p}| \leq \epsilon)$$
$$\Rightarrow$$
$$(\exists l \in \mathbb{R}, \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}, \exists No \in \mathbb{N}, \forall n > No, |l - x_n| \leq \epsilon)$$
$$\text{(} \mathbb{R} \text{ est complet)}$$

En particulier, ces propriétés impliquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists s \in \{0,1\}, \exists a_0 \in \{0,1,2,...,1000,...\}, \exists b \in \mathbb{N}, b > 1, \exists (a_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \{0,1,...,b-1\}^{\mathbb{N}},$$

$$x = (-1)^s (a_0 + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ...) = (-1)^s \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i}{b^i}$$

(Les éléments de $\mathbb{R}$ admettent des développements dans des bases arbitraires) et la réciproque :

5. Nous cachons beaucoup de choses derrière le terme "compatible". La compatibilité fait que $\leq$ n'est pas seulement une relation binaire totale mais bien une "relation d'ordre" et que d est bien une "distance" et non pas simplement une application de $\mathbb{D}$ dans ses positifs. Mais tout cela ne serait vrai que par compatibilité avec un développement dans une certaine base. Tout cela ne serait par suite vrai que dans le contexte d'un développement dans une certaine base.

$$\forall s \in \{0,1\}, \forall a_0 \in \{0,1,2,...,1000,...\}, \forall b \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \forall (a_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \in \{0,1,...,b-1\}^{\mathbb{N}},$$

$$(-1)^s(a_0 + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ...) = (-1)^s \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i}{b^i} \in \mathbb{R}$$

(Tout développement dans une base correspond a un élément de $\mathbb{R}$)

D'après la réciproque, chaque élément de $\mathbb{D}$ peut être associé à un nombre réel (celui qui admet le même développement dans une certaine base). Autrement dit, il existe une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{D}$. Puisque $\mathbb{D}$ est de plus muni d'une relation d'ordre et d'une distance compatible avec le développement dans des bases, alors la surjection est une isométrie strictement croissante (conservation des distances et conservation de la relation d'ordre $\leq$).

Notre constat serait par suite que $\mathbb{D}$ représenterait $\mathbb{R}$ en "projetant" des nombres réels sur leur développement dans certaines bases et en conservant dans le contexte de cette projection la relation d'ordre et la distance. En réalité, la droite des nombres réels usuelle contient sans doute davantage de propriétés des nombres réels que $\mathbb{D}$. En particulier, le développement dans une certaine base que nous avons décrit contient des propriétés additives "autour du 0" et symétrise les nombres autour de l'origine. Toutefois, la propriété d'invariance de l'espace par translation décentre naturellement cette représentation et rend possible l'expression de propriétés additives autour d'autres points. Plus généralement, la géométrie euclidienne est valable dans "l'espace euclidien" et les points de la droite des nombres réels usuelle peuvent être intégrés dans diverses figures de cette géométrie dont certaines correspondent à des opérations ou relations mathématiques. Nous retiendrons que $\mathbb{D}$ est le principal objet contenu dans une droite des nombres réels usuelle.

Deuxième problématique Un élément de l'ensemble $\mathbb{D}$ représente un nombre réel en le projetant sur un "développement dans une certaine base". Les propriétés conservées des nombres réels sont - en plus du pur développement dans une certaine base - leur distance et leur relation d'ordre. Est-ce que les nombres réels peuvent être représentés, au sein du même domaine de représentation, à travers des surjections qui préservent davantage de leurs propriétés ? Peut-on même définir les nombres réels intrinsèquement dans ce domaine de représentation ? Pour mieux comprendre les principes de représentation dans l'espace, étudions plus en détail la droite des nombres réels usuelle.

Lorsque nous avons construit $\mathbb{D}$, nous avons associé la droite des nombres réels et ses caractéristiques (par exemple le fait qu'elle est composée de points appartenant à une droite) à des expressions composées de symboles mathématiques usuels ($\forall x \in \mathbb{D}, x \in \mathbb{D}$). Autrement dit, nous avons associé des objets définis au sein d'un langage géométrique [6] à des propositions définies dans le langage formel. Si le langage géométrique peut être associé au langage formel , alors les deux langages dérivent d'un même sous langage commun. C'est le cas car aucun des deux langages ne dérive strictement l'un de l'autre. Le sous langage commun qui se distribuerait à la fois dans le langage formel et géométrique serait d'un type logico-mathématique - quelles seraient ses caractéristiques ? D'abord, le sous langage permet la manipulation d'objets représentatifs d'un ensemble d'objets particuliers. Ainsi, tout comme x un nombre réel quelconque est défini dans le langage formel, de même un triangle ou un point quelconques sont définis dans le langage géométrique. Par suite, des prédicats généraux peuvent êtres posés sur des objets représentatifs. Par exemple, tout comme un nombre réel x peut être supposé entier (et être ainsi contraint par ce prédicat dans le langage formel), de même un point de la droite des nombres réels peut être "positif" ("à droite" de l'origine) (et être contraint par ce prédicat dans le langage géométrique). De plus, des propositions logiques peuvent être exprimées à l'aide des deux langages. Par exemple, dans le langage formel, nous pouvons écrire la proposition suivante "x $\geq$ 0 et y $\leq$0 $\Rightarrow$ y $\leq$ x". De même, dans le langage géométrique, nous pouvons écrire la proposition : "un point positif est plus grand qu'un point négatif, car l'un est à droite de l'origine et l'autre à gauche" . Les deux propositions se prouvent d'ailleurs avec des règles déductives propres aux langages qui se correspondent (des règles s'appuyant dans les deux cas sur la transitivité de la comparaison formelle ou géométrique). De même que des prédicats peuvent être précisés dans les deux langages, des relations et des lois de composition peuvent être manipulées (des comparaisons ou des additions par exemple). En conclusion, le sous langage commun au langage formel et géométrique semble être muni des mêmes structures déductives que celles observables dans le langage formel et de la même capacité de spécification prédicative/relationelle/compositionelle d'objets. Nous observons un "parallélisme logique" entre le langage formel et géométrique.

6. "langage géométrique" doit être compris ici comme le langage spatial que nous traitons dans le cadre de l'espace euclidien et de la droite des nombres réels.

Quelles sont les différences entre le langage formel et géométrique ? Dans le langage formel, les lois de composition et relations des nombres réels s'appliquent à une diversité plate : les éléments de $\mathbb{R}$. Le langage géométrique est quant à lui contraint différemment. Posons x un élément dans une représentation géométrique, à quoi peut il référer ? x peut référer à une composante (extension, direction, orientation), à des synthèses de ces composantes (vecteurs/translations), à des lieux (points, cercle), à des relations entre des lieux, ... Chacun des objets présentés dépend en outre de la syntaxe du précédent car autrement il quitterait le langage de l'espace euclidien. En effet, il est impossible de concevoir des points sans translations qui les séparent et tout point est par suite dépendant des translations. De même, une translation dépend de ses composantes (extensions, directions et orientations) et perdrait tout sens si les composantes ne pouvaient être définies. Nous étudions le langage de l'espace euclidien en tant qu'ils représente les nombres réels - où se situe le représentant du nombre réel dans la hiérarchie que nous venons de présenter ? Le représentant du nombre réel est un point, soit un lieu qui dépend d'une translation qui dépend elle-même de composantes. Nous voyons ainsi qu'une représentation géométrique des nombres réels dans l'espace euclidien, c'est la mise en forme des nombres réels dans une hiérarchie : "composantes -> translations -> points -> droite" - où "->" signifie "construit" ou "précède". La représentation formelle décrit quant à elle une diversité plate $\mathbb{R}$ (éléments -> ensemble) [7].

Est-ce que les propriétés que nous avons mises en évidence de $\mathbb{D}$ [8] satisfont ce principe ?

" $\forall x \in \mathbb{D}, x \in \mathbb{D}$ ($\mathbb{D}$ est un ensemble) " est une simple tautologie posant le rapport points -> droite

" $\exists d, \forall x, y \in \mathbb{D}^2, d(x,y) \in \{extensions\} \simeq \mathbb{D}^+$ ($\mathbb{D}$ admet une distance) " pose un rapport (point,point).

"$\exists \leq, \forall x, y \in \mathbb{R}^2, x \leq y \; ou \; y \leq x$ ($\mathbb{D}$ est "ordonné") " pose également un rapport (point,point).

Les deux rapports "(point,point)" viennent en fait d'un rapport "translations -> points". En effet, la distance d'un couple de points est égale à l'extension de la translation qui sépare les deux points. La comparaison assignée à deux points est quant à elle le signe de la translation qui les sépare. (Note : Bien sûr, la translation dépend elle-même de composantes, mais le rapport n'est pourtant pas "composantes -> translations -> points". En fait, le vrai rapport essentiel est "points -> translations" mais il ne sera abordé que dans la partie 7. du document. En bref, "translations -> points" est impropre au sens stricte, car ce n'est pas les translations construisant les points qui déterminent le rapport, mais les points construits redistribuant des translations entre eux. Quoi qu'il en soit, voir le paragraphe suivant pour un exemple de rapport "composantes -> translations -> points")

"

$$\forall x \in \mathbb{D}, \exists s \in \{0,1\}, \exists a_0 \in \{0,1,2,...,1000,...\}, \exists b \in \mathbb{N}, b > 1, \exists (a_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \{0,1,...,b-1\}^{\mathbb{N}},$$

$$x = (-1)^s (a_0 + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ...) = (-1)^s \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i}{b^i}$$

(Les éléments de $\mathbb{D}$ admettent des développements dans des bases arbitraires) "
Le développement dans une certaine base est relatif à une description de signes $(-1)^s$ et extensions $((a_0 + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ...))$. Les signes et extensions construisent par suite des translations qui construisent elle-mêmes des points. La propriété pose donc un rapport "composantes -> translations -> points".

Le langage formel décrit logiquement les relations/lois de compositions des nombres réels à l'aide de symboles appartenant à une hiérarchie plate (les éléments de $\mathbb{R}$). Nous pouvons penser que le langage formel est logiquement universel et compatible avec toute représentation pouvant traiter et déterminer des nombres réels. Le langage géométrique est quant à lui plus particulier car il ne peut être morphé librement à d'autres langages du fait de ses contraintes. Même si le langage géométrique est plus contraint, ses contraintes lui donnent des propriétés qui peuvent le rendre intéressant. Une des particularités du langage géométrique est par exemple que la hiérarchie régulatrice " composantes -> translations -> points -> droite " distribue par elle-même la relation d'appartenance, la distance et la relation d'ordre à toute spécification d'objet géométrique. C'est-à-dire que toute détermination d'objet dans le langage géométrique s'intègre dans la hiérarchie et se définit conformément aux relations/applications intégrées dans la hiérarchie (soient $\in$, d, $\leq$).

7. ou plus strictement (ensemble -> élément). Voir partie 7. du document pour plus de détail.
8. ($\mathbb{D}$ est l'objet qui correspond à la droite des nombres réels usuelle)

Puisque les relations/applications $\in$, d et $\leq$ sont présupposées dans le langage, cela exhibe naturellement des liens logiques entre ces dernières.

Nous venons de préciser ce qu'est le "domaine de représentation" de la droite des nombres réels usuelle. En effet, nous avons caractérisé le langage dans lequel la droite des nombres réels est exprimée : le langage maintient une hiérarchie régulatrice "composantes -> translations -> points -> droite". De plus, nous avons précisé quelle structure logique des nombres réels est obtenue dans ce langage à l'aide de la droite des nombres réels usuelle. L'objet posé par la droite des nombres réels usuelle est l'objet $\mathbb{D}$, soit une projection de nombres réels dans des développements dans des bases arbitraires - projection préservant les relations d'ordre et les distances. Par suite, comment poursuivre notre étude de la représentation géométrique des nombres réels ? Il suffit d'explorer l'injection de la structure logique des nombres réels dans le langage de l'espace euclidien. Pour cela, nous allons simplement (iso)morpher les axiomes des nombres réels dans un langage formel satisfaisant la hiérarchie : "composantes -> translations -> points -> droite".

Pour (iso)morpher les axiomes des nombres réels dans un langage formel satisfaisant la hiérarchie : "composantes -> translations -> points -> droite", il suffit de transporter les nombres réels dans une espace qui satisfait la hiérarchie. Sur la droite des nombres réels usuelle, chaque nombre est repéré à partir de l'origine par un vecteur qui se décompose en composantes géométriques (extension, direction, orientation). Posons l'application f qui à chaque nombre réel associe les composantes géométriques du vecteur répérant son point sur la droite des nombres réels usuelle. L'application associe les nombres réels à des composantes et s'intègre dans une hiérarchie "composantes -> translations -> points -> droite". Par suite, l'application transporte les nombres réels dans un espace formel qui permet d'étudier leur représentation dans le langage de l'espace euclidien. L'application à étudier est par suite :

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \rightarrow & Imf \subset \mathbb{T} = \mathbb{R}^{+} \times \Theta \times \Sigma \\ & & x & \mapsto & f(x) = (|x|, \theta_1, signe(x)) \end{array}$$

c'est-à-dire la fonction f qui à chaque élément x de l'ensemble des nombres réels ($\mathbb{R}$) associe un triplet $f(x) = (|x|, \theta_1, signe(x))$ où $|x|$ désigne la valeur absolue de x (soit l'extension du vecteur repérant le point x), θ_1 une constante (soit la direction constante de la droite des nombres réels) et signe(x) le signe de x (soit l'orientation du vecteur repérant x). $\mathbb{R}^{+}$ désigne l'ensemble des extensions, Θ désigne l'ensemble des directions,Σ l'ensemble des signes, $\mathbb{T}$ l'ensemble des triplets. Imf désigne l'ensemble des images des éléments de $\mathbb{R}$ par la fonction f (i.e. les triplets qui correspondent a un nombre réel)

2 Préparatif

2.1 Schéma des éléments

La fonction f que nous souhaitons étudier est :

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \rightarrow & Imf \subset \mathbb{T} = \mathbb{R}^{+} \times \Theta \times \Sigma \\ & & x & \mapsto & f(x) = (|x|, \theta_1, signe(x)) \end{array}$$

décrivons plus précisément l'association que nous retenons.

Signes (Σ) Nous souhaitons associer à chaque nombre un signe qui correspond à l'orientation d'un vecteur. Plus précisemment, l'orientation associée à un nombre doit être celle du vecteur repérant ce nombre sur la droite des nombres réels usuelle. Les nombres strictements positifs et strictement négatifs sont clairement associés à deux signes distincts + et -. A quoi correspondent ces signes ? Dans le contexte d'une droite des nombres réels traditionnellement horizontale, les deux signes + et - correspondent respectivement à l'orientation "vers la droite" et "vers la gauche". Qu'en est-il du signe de 0 ? Du point de vue de la signification géométrique, le vecteur dont le point de départ s'identifie au point d'arrivée - l'origine O - ne semble pas avoir d'orientation privilégiée (il est "au milieu"). Du point de vue de l'usage mathématique, 0 est associé aux nombres positifs ou négatifs sans préférence particulière . Devant le cas particulier du signe de 0, et du fait de son indépendance aux autres signes identifiés, il paraît judicieux de lui associer un signe distinct +-. L'ensemble de signes Σ dont nous aurions besoin serait ainsi constitué de trois signes $\Sigma = \{+, -, +-\}$. Puisque le 0 est toutefois communément regroupé avec les positifs ou négatifs suivant le cas, il semble judicieux de préparer la possibilité de confondre le signe +- avec + et -. A cet effet, nous nous donnons une relation $=_1$ sur Σ (nommée relation d'égalité large) telle que tous les éléments de Σ sont égaux à l'exception de + et -. La définition de $=_1$ est résumée par : " + $\neq_1$ -", c'est à-dire que du point de vue de $=_1$, il n'existe que deux signes distincts + et - tandis que tous les autres sont égaux.

Directions (Θ) Nous souhaitons associer à chaque nombre une direction. Plus précisément, la direction associée à un nombre doit être celle du vecteur repérant son point sur la droite des nombres réels usuelle. Puisque la droite des nombres réels est construite sur une seule direction ("horizontale"), il suffirait que Θ soit constituée d'une constante θ_1. L'ensemble des directions peut contenir instinctivement plus d'éléments mais seul l' "horizontale" nous intéresse a priori. Nous pouvons résumer cela en écrivant : Θ=$\Theta \cup \{\theta_1\}$ (littéralement, Θ est un ensemble qui est égal à lui même (tautologie) et il contient au moins une constante θ_1)

Extensions ($\mathbb{R}^+$ ou Π) Nous souhaitons associer à chaque nombre une longueur ou extension. Plus précisément, la longueur ou extension associée à un nombre doit être celle du vecteur repérant son point sur la droite des nombres réels usuelle. Puisque le nombre x est associé à un vecteur dont l'extension est | x | sa valeur absolue, l'ensemble des extensions dont nous aurions besoin serait $\mathbb{R}^+$. Si nous entreprenons toutefois de définir les extensions indépendamment de $\mathbb{R}$, nous noterons plutôt l'ensemble des extensions : Π .

Triplets ($\mathbb{T}$) Les triplets $\mathbb{T}$ sont simplement le produit cartésien des trois ensembles $\Pi \times \Theta \times \Sigma$ (les triplets réalisent la synthèse des trois composantes). La relation qu'entretient chacune des trois composantes avec un triplet peut se résumer par trois fonctions : extension $\in \Pi^{\mathbb{T}}$, direction $\in \Theta^{\mathbb{T}}$, signe $\in \Sigma^{\mathbb{T}}$ qui sont respectivement les fonctions qui à tout triplet associe sa première, deuxième ou troisième composante. Tous les triplets n'ont pas de signification géométrique. Par exemple, le triplet (3,θ_1,+-) est un vecteur de signe nul mais d'extension non nulle. Du fait de son incohérence, il n'appartient pas à notre espace. Seuls les triplets qui sont associés à un nombre réel ont une représentation géométrique associée. Les triplets associés à un nombre réel sont les éléments de Imf = $\{f(x), x \in D_f = \mathbb{R}\}$). Imf est simplement composé des triplets d'extensions non nulles associés au signe + et - ; ainsi que du triplet $(0, \theta_1, +-)$. Autrement dit, Imf = $((\mathbb{R}^+ \backslash \{0\}) \times \{\theta_1\} \times \{+,-\}) \cup (0, \theta_1, +-)$.

L'image de la fonction f est égale au produit cartésien des nombres réels strictements positifs par la constante θ_1 par les signes + et - ; auquel nous ajoutons le triplet (0, θ_1, +-)

2.2 Schéma de l'addition, multiplication et comparaison

Pour que les points de la droite des nombres réels soient liés formellement aux nombres, nous les avons décomposés en triplets (extension, direction, signe). Pour obtenir les axiomes des nombres réels sur ces nombres décomposés, il est nécessaire de munir les nombres décomposés d'une addition, d'une comparaison et d'une multiplication. Que deviennent les additions, comparaisons et multiplications sur ces nombres décomposés ?

Une rapide analyse de ce qui se produit si nous ajoutons deux nombres décomposés nous montre que le résultat se décrit bien avec des logiques propres aux composantes. En effet, si deux nombres décomposés ont le même signe, l'extension de leur somme est la somme de leur extensions. De plus, dans ce cas, le signe de leur somme est le signe commun. Si toutefois les nombres décomposés ont des signes différents, alors l'extension de leur somme est la soustraction de la plus grande extension par la plus petite. Le signe de leur somme est dans ce cas le signe du nombre ayant la plus grande extension. Enfin, ajouter (0,θ1,+-) à un nombre ne change ni son signe, ni son extension. De plus, la somme de deux nombres d'extensions égales et de signes strictement distincts donne le nombre (0,θ1,+-). En conclusion, la comparaison des signes et la comparaison des extensions crée plusieurs cas qui peuvent se résumer ainsi :

Addition L'addition $\bigoplus$ est la loi de composition définie sur Imf telle que : Soient $\vec{d_1} = (e, \theta, \sigma)$, $\vec{d_1}' = (e', \theta, \sigma') \in Imf^2$

$$\vec{d_1} \bigoplus \vec{d_1}' = \begin{cases} (\text{e + e'}, \theta, \sigma) & \text{si} \quad \sigma =_1 \sigma', (\sigma \neq +-) \\ (\text{e - e'}, \theta, \sigma) & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e' < e \\ (\text{e' - e}, \theta, \sigma') & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e < e' \\ (\text{e + e'}, \theta, \sigma') & \text{si} \quad \sigma =_1 \sigma', (\sigma = +-) \\ (\text{e - e'}, \theta, +-) & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e = e' \end{cases} \tag{1}$$

Ou encore, en utilisant $\leq$:

$$\vec{d_1} \bigoplus \vec{d_1}' = \begin{cases} (\text{e + e'},\theta,\sigma) & \text{si} \quad \sigma =_1 \sigma',\, \sigma \neq +- \\ (\text{e - e'},\theta,\sigma) & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e' \leq e, e \not\leq e' \\ (\text{e' - e},\theta,\sigma') & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e \leq e', e' \not\leq e \\ (\text{e + e'},\theta,\sigma') & \text{si} \quad \sigma =_1 \sigma',\, \sigma = +- \\ (\text{e - e'},\theta,+-) & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e \leq e', e' \leq e \end{cases} \tag{2}$$

où + et - sont deux lois de composition et $\leq$ une relation définie sur Π (extensions).

La comparaison des nombres décomposés ne semble quant à elle pas se décrire naturellement avec des logiques s'appliquant sur des composantes. En effet, l'intuition principale de la comparaison dans l'espace géométrique est celle d'un point "plus à droite" qu'un autre. La relation s'exprime dans la hiérarchie "composantes -> translations -> points -> droite" au niveau "translations -> points" [9]. Malgré tout, pour obtenir une description au niveau des composantes, nous pouvons faire une disjonction de cas suivant le signe des nombres décomposés et obtenir alors :

Comparaison La comparaison $\bigcirc\!\!\!\!<$ est la relation définie sur Imf telle que : Soient $\vec{d_1} = (e,\theta,\sigma)$, $\vec{d_1}' = (e',\theta,\sigma') \in Imf^2$

$\vec{d_1} \bigcirc\!\!\!\!< \vec{d_1}' \Leftrightarrow (\sigma = -$ et $\sigma' = +)$ ou $(e \leq e'$ et $\sigma =_1 \sigma' =_1 +)$ ou $(e' \leq e$ et $\sigma =_1 \sigma' =_1 -)$

Un nombre $\vec{d_1}$ est plus petit que $\vec{d_1}'$ si et seulement si : soit le signe de $\vec{d_1}$ est - et le signe de $\vec{d_1}'$ est + ; soit $\vec{d_1}$ et $\vec{d_1}'$ ont un signe positif et l'extension de $\vec{d_1}$ est plus petite que l'extension de $\vec{d_1}'$; soit $\vec{d_1}$ et $\vec{d_1}'$ ont un signe négatif et l'extension de $\vec{d_1}'$ est plus petite que l'extension de $\vec{d_1}$

La multiplication de nombres décomposés se décrit clairement avec des logiques propres aux composantes. En effet, l'extension du produit de deux nombres décomposés est le produit des extensions. De plus, le signe du produit de deux nombres décomposés est le produit de leur signe.

Multiplication La multiplication $\otimes$ est la loi de composition définie sur Imf telle que : Soient $\vec{d_1}, \vec{d1}' \in Imf^2$

$\vec{d_1} \otimes \vec{d_1}' = (e \times e', \theta 1, \sigma \times \sigma')$

(3)

où $\times \in \Pi^{\Pi\times\Pi}$ est la multiplication classique définie sur $\mathbb{R}^+$ et $\times \in \Sigma^{\Sigma\times\Sigma}$ est une multiplication de signes telle que :

$$\sigma \times \sigma' = \begin{cases} \sigma & \text{si} \quad \sigma' = + \\ \mathit{oppos}\acute{e}(\sigma) & \text{si} \quad \sigma' = - \\ \text{+-} & \text{sinon} \quad (\sigma' = +-) \end{cases} \tag{4}$$

(Multiplier un signe s par le signe + ne change pas ce signe. Multiplier un signe s par le signe - change le signe s en son opposé. Multiplier un signe s par le signe +- change le signe s en +-)

où opposé est une fonction qui à un signe associe un signe ($\mathit{oppos}\acute{e} \in \Sigma^\Sigma$) définie ainsi :

$$\mathit{oppos}\acute{e}(\sigma) = \begin{cases} \text{-} & \text{si} \quad \sigma = + \\ + & \text{si} \quad \sigma = - \\ \text{+-} & \text{sinon} \quad (\sigma = +-) \end{cases} \tag{5}$$

(L'opposé de + est -. L'opposé de - est +. L'opposé de +- est +-)

Nous avons utilisé +,-,$\times$,$\leq$ (i.e. les lois de composition et relation) telles qu'elles sont définies dans $\mathbb{R}$ pour formaliser les logiques des composantes qui permettent d'obtenir $+\times$,$\leq$ sur les triplets (c'est-à-dire $\bigoplus, \otimes, \bigcirc\!\!\!\!<$). Dès lors, nous pouvons faire en sorte que (Imf, $\bigoplus, \otimes, \bigcirc\!\!\!\!<$) soit équivalent (i.e. isomorphe [10]) aux nombres réels $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ en imposant que Π (l'ensemble des extensions) satisfasse les axiomes des nombres réels.

9. ou plus strictement "points -> translations". Voir partie 7. pour plus de détail.
10. $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Leftrightarrow f(x) \bigcirc\!\!\!\!<$ f(y) ; f(x + y)= f(x) $\bigoplus$ f(y) ; f(x $\times$ y)= f(x) $\otimes$ f(y) ; f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur Imf

Rejet de la possibilité $\Pi = \mathbb{R}^+$ Si nous pouvions faire en sorte que Π satisfasse les axiomes des nombres réels, alors les nombres réels seraient purement représentés par des extensions. La hiérarchie "composantes -> translations -> points -> droite" pourrait être remplacée par un simple médium de représentation "extension". La hiérarchie serait alors rendue absurde. Nous ne devons ainsi pas chercher à faire que Π satisfasse les axiomes des nombres réels. Comme nous l'avons vu dans notre analyse de la droite des nombres réels usuelle, certaines relations et propriétés des nombres se distribuent dans la hiérarchie du langage euclidien même. Par suite, les composantes ne peuvent pas par elles-mêmes s'accorder à tous les axiomes des nombres réels. Si Π ne peut satisfaire les axiomes des nombres réels, Π peut-il s'identifier aux nombres réels positifs $\mathbb{R}^+$? Si $\mathbb{R}^+$ est compris comme $\mathbb{R}$ auquel on retire les nombres inférieurs à 0, alors $\Pi \neq \mathbb{R}^+$. En effet, le système des axiomes des nombres réels n'est pas valable sur Π (à gauche de l'équation) et $\mathbb{R}^+$ ne serait défini qu'au sein d'un système dans lequel les axiomes des nombres réels sont valables (à droite de l'équation). L'égalité $\Pi = \mathbb{R}^+$ serait ainsi impossible.

Si Π ne peut satisfaire tous les axiomes des nombres réels, Π en satisfait très certainement une partie. Par exemple, lorsque nous avons décrit dans $\mathbb{D}$ des développements dans une certaines base ($(a_0 + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ...) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i}{b^i}$), l'addition utilisée s'appliquait sur des extensions et paraît très similaire à l'addition des nombres réels. Puisque les extensions ne correspondent qu'à des nombres positifs, nous pourrions penser que Π satisfait tout ce qui reste des axiomes lorsqu'on restreint les nombres réels aux nombres positifs. Qu'est-ce que cela signifie et comment le décrire d'une manière qui ait un sens dans le cadre de notre étude ? Nous venons de rejeter la possibilité que Π satisfasse les axiomes des nombres réels en vertu des caractéristiques du langage de l'espace euclidien. Pour guider notre analyse des logiques à définir sur les composantes pour que les axiomes des nombres réels soient valables dans Imf, nous allons étudier les différents objets au sein même du langage de l'espace euclidien, c'est-à-dire a partir de ($\bigoplus, \bigotimes, \bigcirc\!\!\!\!<$). Mais d'ailleurs sommes nous bien dans le langage de l'espace euclidien ?

Vérification de la compatibilité de ($\bigoplus, \bigotimes, \bigcirc\!\!\!\!<$) avec le langage de l'espace euclidien

Lorsque nous avons posé $\bigoplus$, nous avons remarqué que la somme de deux translations (ou nombres décomposés) pouvait se décrire à partir de manipulation de composantes combinant la comparaison $\leq_\Pi$ et la loi de composition $+_\Pi$ (comprendre $+$ et $\leq$ relatives à Π, i.e. aux extensions) . $+_\Pi$ et $\leq_\Pi$ appartiennent elles au langage de l'espace euclidien ? La loi de composition $+_\Pi$ que nous avons définie sur les extensions s'interprète aisément comme une "jointure d'extension". C'est la jointure d'extension que nous utilisons pour reporter l'unité à droite d'elle-même et obtenir le point 2 à partir du point 1. Qu'en est-il de la relation $\leq_\Pi$ définie sur les extensions ? La comparaison de deux extensions est une relation naturelle dans l'espace empirique (i.e. dans l'espace que nous expérimentons quotidiennement). En tant qu'observateur, mes perceptions définissent des lieux. Tous les couples de lieux sont séparés par des mouvements nécessaires pour les parcourir que je juge plus ou moins "amples"/"longs"/"coûteux". Le caractère "ample"/"long"/"coûteux" correspond à une extension et une telle extension se décline selon différents degrés comparables. Par suite, des extensions ayant différents degrés comparables se définissent naturellement entre tout couple de lieux que je me donne. En outre, lorsque, dans l'espace empirique, je construis une extension jointe à une autre, il est clair que la nouvelle extension est plus ample que chacune de ses parties. Par suite, dans l'espace empirique, la jointure d'extension et la relation de comparaison d'extension coexistent et sont compatibles en vertu de la façon dont je les apprécie. Dans l'espace du langage euclidien toutefois, les matières/informations définissant des lieux et le sujet appréciant ces lieux sont supprimés. Le langage de l'espace euclidien, en tant que totalité *a priori*, supprime le sujet et par suite le médium à travers lequel la jointure et la comparaison coexistent et sont compatibles dans l'espace empirique. Dans le langage de l'espace euclidien, la comparaison et la jointure d'extension ne sont pas naturellement compatibles et doivent être posées simultanément dans un système qui présuppose leur compatibilité. Puisque toutefois la jointure d'extension peut être posée indépendamment de la comparaison, alors la comparaison doit s'appuyer sur la jointure d'extension pour exister simultanément et compatiblement avec cette dernière. Or, dans le cadre des nombres positifs, nous pouvons agréablement écrire la comparaison à partir de l'addition comme suit : $\forall e, e' \in \Pi^2, e \leq e' \Leftrightarrow \exists e'' \in \Pi, e + e'' = e'$. *(Littéralement : pour tout e et e' deux élément appartenant à l'ensemble des extensions, e est plus petit que e' si et seulement si il existe une extension e" telle que e jointe à e" est égale à e').* A noter que la soustraction $-_\Pi$ que nous avons utilisée pour définir $\bigoplus$ n'est qu'une loi de composition liée à la comparaison $\leq_\Pi$ (et dépendante de celle-ci). Plus précisément, $\forall e, e' \in \Pi^2, e - e'$ est définie et égale à e" ssi $e' + e'' = e$, où e" $\in \Pi$.*(Littéralement : pour tout e et e' deux élément appartenant à l'ensemble des extensions, la différence e - e' est définie comme e" si et seulement si e jointe à e" est égale à e', e" étant une extension)* Puisque tout est défini relativement à la jointure d'extension $+_\Pi$ qui appartient au langage de l'espace euclidien, la logique des composantes de $\bigoplus$

est bien compatible avec le langage de l'espace euclidien. Pouvons nous intégrer $\oplus$ dans toute la hiérarchie "composantes -> translations -> points -> droite" ?

$\oplus$ (Interprétation utilisant les points de départ et d'arrivée) $\forall \vec{d1}, \vec{d2}, \vec{d3} \in Imf^3, \vec{d1} \oplus \vec{d2} = \vec{d3} \Leftrightarrow \vec{d3}$ est le résultat de l'addition vectorielle de $\vec{d1}$ et $\vec{d2}$ - obtenu en réalisant les transferts de points correspondant à $\vec{d1}$ et à $\vec{d2}$ l'un après l'autre - conformément aux transformations de composantes décrites dans la disjonction de cas de $\oplus$. De plus, la première translation a toujours pour point de départ une origine O car le lien entre Imf et le langage de l'espace euclidien est la localisation des points sur la droite des nombres réels à partir d'une origine O. Nous constatons que $\oplus$ s'intègre bien dans la hierarchie "composantes -> translations -> points -> droite". Passons à $\otimes$.

$\otimes$ (correspondant à la relation d'ordre large $\leq$) est définie avec les même éléments logiques que $\oplus$ au niveau des composantes (i.e. $\leq_\Pi$ et donc $+_\Pi$). Dès lors, la logique des composantes de $\otimes$ est compatible avec le langage de l'espace euclidien. En effet, nous avons posé : $\vec{d_1} \otimes \vec{d_1}' \Leftrightarrow (\sigma = -$ et $\sigma' = +)$ ou $(e \leq e'$ et $\sigma =_1 \sigma' =_1 +)$ ou $(e' \leq e$ et $\sigma =_1 \sigma' =_1 -)$. Pouvons nous intégrer $\otimes$ dans toute la hiérarchie "composantes -> translations -> points -> droite" ? Si nous suivons la logique établie au niveau des composantes, la comparaison $\otimes$ polarise l'espace en rendant les négatifs plus petits que les positifs. De plus, la polarité se définit entre les nombres de mêmes signes à travers $e' \leq e$ ou $e \leq e'$. La polarité "gauche/droite" est donc décrite directement pour les points de part et d'autre de l'origine - et également partout avec l'utilisation des comparaisons $e' \leq e$ ou $e \leq e'$. Par suite, avec l'interprétation des vecteurs comme des couples (point de départ/point d'arrivée), la scission gauche/droite se réalise autour de tout point, i.e. tout le long des points représentant les nombres. Nous pouvons alors écrire :

$\otimes$ (Interprétation comme comparaison de points d'arrivée) $\forall \vec{d1}, \vec{d2} \in Imf^2, \vec{d1} \otimes \vec{d2} \Leftrightarrow$ le point d'arrivée de $\vec{d2}$ est à droite du point d'arrivée de $\vec{d1}$ (où à droite désigne : vers le sens positif) (où $\vec{d1}$ et $\vec{d2}$ sont munis du même point de départ O). De même que l'addition $\oplus$, la comparaison $\otimes$ s'intègre bien dans la hiérarchie "composantes -> translations -> points -> droite". Passons à $\otimes$.

$\otimes$ est définie avec deux nouvelles logiques sur les composantes. D'une part, les extensions sont munies de $\times_\Pi$, d'autre part les signes sont munis de $\times_\Sigma$. Il s'agirait d'une part de définir $\times_\Pi$ et $+_\Pi$ compatiblement dans le langage de l'espace euclidien (ce qui pourrait peut-être se faire car $+_\Pi$ se distribue sur $\times_\Pi$). Quant à l'existence d'une loi de composition sur les signes, notre conception des signes comme trois orientations statiques "à gauche", "au milieu" et " à droite" ne permet pas de l'obtenir. En effet, les signes devraient posséder des principes "transformant" pour qu'ils soient munis d'une loi de composition. Notre conception actuelle de l'espace euclidien ne permet pas d'y intégrer $\otimes$. Avant de proposer de nouvelles conceptions de l'espace euclidien (représentant les nombres réels), tâchons d'améliorer notre connaissance de la version que nous avons déjà commencé à étudier. Pour cela, passons nous temporairement de $\times$ et injectons la logique des axiomes des nombres réels relatifs à $+$ et à $\leq$ dans le langage de l'espace euclidien.

Pour (iso)morpher des axiomes des nombres réels (relatifs à $+$ et à $\leq$) vers le langage de l'espace euclidien, nous allons imposer ces axiomes au niveau des points et observer les conditions logiques que cela impose sur l'intégralité de la hiérarchie. En bref, nous allons imposer les axiomes sur (Imf, $\oplus$,$\otimes$) et observer les logiques des composantes (i.e. principalement des logiques de $(\Pi, +)$) que cela implique. Dans un moment réciproque, il s'agira de vérifier que les conditions obtenues assurent que les axiomes des nombres réels sont valables sur Imf.

3 Etude des axiomes relatifs à + et $\leq$

Dans le sens direct, nous imposons les axiomes des nombres réels aux points du langage de l'espace euclidien à travers Imf. Que savons nous du langage de l'espace euclidien ? Nous savons qu'il reproduit + et $\leq$ des nombres réels avec $\bigoplus$ et $\otimes$. De plus, il doit produire une correspondance entre les nombres réels et ses éléments conforme à :

$$\begin{array}{rcll} f & : & \mathbb{R} & \rightarrow & Imf \subset \mathbb{T} = \Pi \times \Theta \times \Sigma \\ & & x & \mapsto & f(x) = (|x|, \theta_1, signe(x)) \end{array}$$

Puisque Π ne peut satisfaire les axiomes des nombres réels, alors x $\mapsto$ |x| n'est pas défini comme une application de $\mathbb{R}$ vers Π et l'application étudiée est en fait :

$$\begin{array}{rcll} f & : & \mathbb{R} & \rightarrow & Imf \subset \mathbb{T} = \Pi \times \Theta \times \Sigma \\ & & x & \mapsto & f(x) = (extension(x), \theta_1, signe(x)) \end{array}$$

où le lien entre x et extension(x) devra être établi en plongeant $\mathbb{R}$ et Imf dans des structures algébriques similaires et en liant les éléments se correspondant. La fonction x $\mapsto$ signe(x) est quant à elle toujours une condition qui doit être préservée pour que les triplets correspondent aux points de la droite des nombres réels.

Sens direct Les hypothèses du sens direct sont : - f est un isomorphisme [11] qui conserve le signe ; - $\bigoplus$ et $\otimes$ sont définies avec $+_\Pi$,$-_\Pi$ et $\leq_\Pi$ (relatives à Π) comme suit ;
Soient $\vec{d_1} = (e, \theta, \sigma)$, $\vec{d_1}' = (e', \theta, \sigma') \in Imf^2$:

$$\vec{d_1} \bigoplus \vec{d_1}' = \begin{cases} (\text{e + e'}, \theta, \sigma) & \text{si} \quad \sigma =_1 \sigma', (\sigma \neq +-) \\ (\text{e - e'}, \theta, \sigma) & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e' < e \\ (\text{e' - e}, \theta, \sigma') & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e < e' \\ (\text{e + e'}, \theta, \sigma') & \text{si} \quad \sigma =_1 \sigma', (\sigma = +-) \\ (\text{e - e'}, \theta, +-) & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e = e' \end{cases}$$

$\vec{d_1} \otimes \vec{d_1}' \Leftrightarrow (\sigma = -$ et $\sigma' = +)$ ou $(e \leq e'$ et $\sigma =_1 \sigma' =_1 +)$ ou $(e' \leq e$ et $\sigma =_1 \sigma' =_1 -)$
- les entités de Π sont définies à partir de la loi de composition $+_\Pi$ comme suit
$\forall e, e' \in \Pi^2, e - e'$ est définie et égale à e" ssi $e' + e'' = e$, où e" $\in \Pi$; $\forall e, e' \in \Pi^2, e \leq e' \Leftrightarrow \exists e'' \in \Pi, e + e'' = e'$.
- Enfin, $\mathbb{T}$ (donc Π) est défini aussi petit que possible sous ces conditions, c'est-à-dire que

$$\begin{array}{rcll} extension & : & Imf & \rightarrow & \Pi \\ & & \vec{d1} & \mapsto & extension(\vec{d1}) \end{array}$$

est surjective (hypothèse d'économie ou encore de suffisance de $\mathbb{R}$ pour déterminer Π).

Sens réciproque Dans le sens réciproque, nous vérifions que les conditions établies imposent les axiomes des nombres réels sur Imf lorsqu'il est le plus grand ensemble vérifiant toutes les conditions imposées. Puisque, dans ce contexte, Imf est défini intrinsèquement, alors Imf définit $\mathbb{R}$ à travers l'isomorphisme réciproque f^{-1}. Note : notre choix de supposer que Imf est le plus grand ensemble vérifiant les conditions imposées fait que nous favorisons certaines conditions restrictives plutôt que génératives (ce qui s'avère plus élégant dans notre cas principalement pour la définition du lien entre les extensions et signes).

3.1 Groupe additif

$\bigoplus$ est munie d'un élément neutre $\exists f(0) = \vec{0} \in Imf, \forall \vec{d1} \in Imf, \vec{d1} \bigoplus \vec{0} = \vec{0} \bigoplus \vec{d1} = \vec{d1}$
(*Il existe une translation nulle qui peut être ajoutée à d'autres sans les modifier*)

La condition équivalente est : extension(f($0_\mathbb{R}$))=0_Π où $\forall e \in \Pi, e + 0_\Pi = 0_\Pi + e = e$. Autrement dit : + admet un élément neutre noté 0 dans Π et extension(f(0))=0. Finalement, $\vec{0}$ = f(0)=(0, θ_1, +-)
(Il existe une extension nulle qui peut être jointe à d'autres sans les modifier. Elle est dans un vecteur de signe +- et cette association représente le nombre 0. C'est donc l'image par f du nombre réel 0 : f(0). On peut la noter $\vec{0}$ dans Imf)

11. $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Leftrightarrow f(x) \otimes$ f(y) ; f(x + y)= f(x) $\bigoplus$ f(y) ; f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur Imf

Preuve Supposons que $+ \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ soit munie d'un élément neutre 0.Nous avons du fait du morphisme, $\bigoplus$ est munie d'un élément neutre $\vec{0}$ et $f(0) = \vec{0}$. On a par définition de l'élément neutre $\forall \vec{d1} \in Imf$, $\vec{d1} \bigoplus f(0) = f(0) \bigoplus \vec{d1} = \vec{d1}$. Considérant, $\forall \vec{d1} \in Imf, f(0) \bigoplus \vec{d1} = \vec{d1}$, on a , d'après le 4ème cas de la disjonction de cas de $\bigoplus$ qui s'applique du fait du signe de f(0) (signe(f(0))= +-), $\forall \vec{d1}$, $(extension(f(0)) + extension(\vec{d1}), \theta_1, signe(\vec{d1})) = (extension(\vec{d1}), \theta_1, signe(\vec{d1}))$. Donc $\forall \vec{d1} \in Imf, extension(f(0)) + extension(\vec{d1}) = extension(\vec{d1})$ (égalité sur la première composante du triplet). Puisque Π est défini aussi petit que possible, $\begin{array}{rccc} extension & : & Imf & \rightarrow & \Pi \\ & & \vec{d1} & \mapsto & extension(\vec{d1}) \end{array}$ est surjective. Donc on obtient $\forall e \in \Pi$, $extension(f(0)) + e = e$. Considérons $\forall \vec{d1}, \vec{d1} \bigoplus f(0) = \vec{d1}$. D'après le 1er cas de la disjonction de cas de $\bigoplus$ qui s'applique pour tout $\vec{d1}$ de signe non nul, i.e. pour tout $\vec{d1}$ non nul d'après l'hypothèse d'un isomorphisme qui conserve le signe (i.e. l'unicité d'un vecteur de signe +- est donnée trivialement par l'hypothèse de conservation du signe et du fait que f est une fonction), $\forall d1 \in Imf \backslash \{\vec{(0)}\}$, $(extension(\vec{d1}) + extension(f(0)), \theta_1, signe(\vec{d1})) = (extension(\vec{d1}), \theta_1, signe(\vec{d1}))$. Ce qui donne, $\forall d1 \in Imf \backslash \{\vec{(0)}\}$, $extension(\vec{d1}) + extension(f(0)) = extension(\vec{d1})$ puis $\forall e \in \Pi \backslash \{extension(f(0))\}, e + extension(f(0)) = e$. Nous avons finalement $\forall e \in \Pi, e + extension(f(0)) = extension(f(0)) + e = e$ donc extension(f(0)) est un élement neutre de Π.

Réciproquement, supposons extension(f(0))=0 où $\forall e \in \Pi, e + 0 = 0 + e = e$. Montrons que $+ \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ est munie d'un élément neutre. Puisque d'après les disjonction de cas de $\bigoplus$, $(0, \theta 1, +-)$ est un élément neutre de Imf, alors son image réciproque $f^{-1}(\vec{0} = (0, \theta 1, +-)$ est un élément neutre de $\mathbb{R}$. Si plus de détail doit être donné, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(0 + x) = f(0) \bigoplus f(x)$ d'après le morphisme pour $\bigoplus$ (où 0 non encore posé comme l'élément neutre de $\mathbb{R}$ est simplement l'image réciproque $f^{-1}(\vec{0} = (0, \theta 1, +-)))$. De plus, f(0) $\bigoplus$ f(x) = f(x) d'après la définition de $\bigoplus$ et du fait que extension(f(0)) est l'élément neutre de Π (cf. 4ème disjonction de cas) . Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(0 + x) = f(x)$. f étant bijective donc injective, on en déduit $\forall x \in \mathbb{R}, 0 + x = x$, puis de manière analogue $\forall x \in \mathbb{R}, 0 + x = x$. (0 est un élément neutre de $\mathbb{R}$)

Tout élément admet un opposé $\forall \vec{d1} = (e, \theta_1, \sigma) \in Imf, \exists \vec{d1}' \in Imf, \vec{d1} \bigoplus \vec{d1}' = \vec{d1}' \bigoplus \vec{d1} = \vec{0}$
(*Pour toute translation, il existe une autre translation qui l'annule.*)

Puisque par construction, le signe est conservé, on peut trouver que la condition équivalente est : $\forall \vec{d1} = (e, \theta_1, \sigma) \in Imf \subset D1$, $\exists \vec{d1}' = (e, \theta_1, opposé(\sigma)) \in Imf \subset D1$ où opposé $\in \Sigma^\Sigma$ est une fonction de l'ensemble des signes vers l'ensemble des signes définie telle que :

$$opposé(\sigma) = \begin{cases} \text{-} & \text{si} \quad \sigma = + \\ + & \text{si} \quad \sigma = - \\ \text{+-} & \text{sinon} \quad (\sigma = +-) \end{cases} \tag{6}$$

(Pour tout triplet extension-direction-signe, il existe le triplet extension-direction-"signe opposé", où opposé est telle que décrite ici.)

Preuve Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, x + x' = x' + x = 0$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, f(x + x') = f(x' + x) = f(0)$, puis $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, f(x) \bigoplus f(x') = f(x') \bigoplus f(x) = f(0)$ par morphisme. Puisque les signes sont conservés, on a signe(f(x)) = opposé(signe(f(x'))). Enfin, la bijectivité de f donne $\forall \vec{d1} \in Imf, \exists \vec{d1}' \in Imf, \vec{d1} \bigoplus \vec{d1}' = \vec{d1}' \bigoplus \vec{d1} = \vec{0}$. (avec de plus $signe(\vec{d1}') = opposé(signe(\vec{d1})))$. D'après les disjonctions de cas, puisqu'on doit avoir signe($\vec{d1} \bigoplus \vec{d1}'$)= +-, on a de plus nécessairement extension($\vec{d1}$)=extension($\vec{d1}'$).

Réciproquement, on vérifie immédiatement $(e, \theta_1, opposé(\sigma))$ est le symétrique de (e, θ_1, σ) pour $\bigoplus$. Par isomorphisme (qui remonte de Imf vers $\mathbb{R}$), tout élément admet un opposé pour + dans $\mathbb{R}$.

Remplacement de la condition équivalente établie ; définition intrinsèque du lien entre signe et extension L'unicité de l'extension associée à +- n'a pas été posée dans Imf. Nous l'avons utilisée dans le sens direct de la preuve de la section précédente (d'après la conservation du signe défini dans $\mathbb{R}$) mais nous devons l'intégrer dans nos conditions équivalentes pour définir intrinsèquement le signe dans Imf. Si nous ajoutions simplement la condition d'unicité de l'extension associée à +- aux conditions que nous venons de poser, nous aurions : $\forall \vec{d1} = (e, \theta_1, \sigma) \in Imf \subset \mathbb{T}$, $\exists \vec{d1}' = (e, \theta_1, opposé(\sigma)) \in Imf \subset \mathbb{T}$ (condition qui vient d'être établie) ET $signe(\vec{d1}) = +- \Rightarrow extension(\vec{d1}) = 0$ (condition qui doit être posée) ; Plutôt que de retenir ces deux conditions, nous posons un lien plus élégant entre les signes et les extensions :

$$\forall \vec{d1} \in Imf, extension(\vec{d1}) = 0 \Leftrightarrow signe(\vec{d1}) = +-$$

(Seule l'extension nulle est associée au signe +-. Toute extension non nulle est dans deux vecteurs dont l'un est de signe + et l'autre de signe -) [12]

$\bigoplus$ est interne $\forall \vec{d1}, \vec{d2} \in Imf^2, (\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \in Imf.$
(*Deux translations peuvent être sommées. La somme de deux translations est une translation*)

Il faut et suffit que : $\forall e, e' \in \Pi^2, e + e' \in \Pi$ (+ est une loi de composition interne dans Π), $(\forall e, e' \in \Pi^2, \exists! e'' \in \Pi, (e + e'' = e') ou (e' + e'' = e)$) (i.e. $\leq_\Pi$ est totale ainsi qu'une certaine condition d'unicité) et $(\forall e, e', \exists e'', e = e' + e'' et \exists e''', e + e''' = e' \Rightarrow e = e'$) (i.e. antisymétrie de $\leq_\Pi$)
(Deux extensions peuvent se joindre. Deux extensions se joignant définissent une extension.)
(Pour tout couple d'extensions, il existe une unique extension qui jointe à la première est égale à la seconde ou jointe à la seconde est égale à la première).
(Un couple d'extensions dont la première est une partie de la seconde et la seconde une partie de la première est un couple d'extensions égales) (Note : cette condition va être remplacée par une condition plus commode dans la suite du document)). [13]

Preuve Supposons que + est interne dans $\mathbb{R}$. Alors par isomorphisme $\bigoplus$ est interne dans Imf. $\forall \vec{d1}, \vec{d2}, \in Imf, (\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \in Imf$. Montrons d'abord, $\forall e, e' \in \Pi^2, e + e' \in \Pi$. Premièrement, si une des deux extensions e ou e' est nulle, alors c'est vrai. Sinon,prenons deux extensions non nulles quelconques dans Π. Puisque Π est aussi petit que possible elles sont dans 2 vecteurs $\vec{d1}$, $\vec{d1}'$ (de signes différents de +- car +- n'est associé qu'à l'extension nulle d'après l'hypothèse de conservation du signe). En prenant l'opposé éventuellement, les deux extensions sont dans 2 vecteurs de même signe +. D'après le 1er cas de la disjonction de cas qui s'applique, nous avons $\vec{d1} \bigoplus \vec{d1}'$ = (e + e',θ,+) $\in$ Imf, donc $e + e' \in \Pi$. Dès lors, $\forall e, e' \in \Pi, e + e' \in \Pi$. Montrons maintenant $\forall e, e' \in \Pi^2, \exists! e'' \in \Pi, (e + e'' = e') ou (e' + e'' = e)$. Si e ou e' (respectivement) est nulle alors c'est vrai (prenons e" égale à e' ou e (respectivement)). Sinon, e et e' sont dans des vecteurs de signes non nuls. En prenant l'opposé éventuellement, nous pouvons les prendre de signes différents. Un cas et un seul parmi le 2ème, 3ème ou 5ème cas de la disjonction de cas doit s'appliquer (cf. signe distinct du résultat selon les 3 cas), dès lors soit e$\leq$ e' et $e' \nleq e$ soit e' $\leq$ e et e $\nleq$ e' soit e = e', i.e $\exists e'', (e + e'' = e') ou (e + e'' = e')$ et antisymétrie de $\leq$ (nécessaire ici lorsque e et e' sont non nulles mais qui s'étend au cas où au moins l'une est nulle). De plus, e - e' ou e' - e étant bien défini (f est une fonction), ce e" doit être unique. Finalement, $\forall e, e' \in \Pi^2, \exists! e'', (e'' + e = e') ou (e'' + e = e')$ et antisymétrie de $\leq$ $(\forall e, e', \exists e'', e = e' + e'' et \exists e''', e + e''' = e' \Rightarrow e = e'$)

Réciproquement, supposons $\forall e, e' \in \Pi^2, e + e' \in \Pi$, $\forall e, e' \in \Pi^2, \exists! e'', (e'' + e = e') ou (e'' + e = e')$ et l'antisymétrie de $\leq$. Soient deux vecteurs $\vec{d1}$ $\vec{d1}' \in Imf^2$. Si leurs signes sont les mêmes au sens large, le signe de $\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}$ est bien déterminé, de plus e + e' $\in \Pi$, dès lors $\vec{d1} \bigoplus \vec{d1}'$ $\in$ Imf. Si leurs signes sont différents au sens stricte (i.e. un signe est + et l'autre est -), un seul cas parmi les trois disjonctions de cas s'applique donc le signe est déterminé. De plus, e - e' ou e' - e $\in \Pi$ (lorsque la disjonction de cas correspondante s'applique). Dès lors, $\vec{d1} \bigoplus \vec{d2} \in Imf$. Par isomorphisme (qui remonte de Imf vers $\mathbb{R}$), + est interne dans $\mathbb{R}$. (note : dans la suite du document, nous omettons par défaut le fait que la propriété se transmet à $\mathbb{R}$ par isomorphisme)

Remarque : nous faisons de $\leq_\Pi$ une relation totale (donc réflexive) et antisymétrique. Si nous imposons une condition de transitivité, $\leq_\Pi$ sera une relation d'ordre (totale).

$\bigoplus$ est commutative $\forall \vec{d1}, \vec{d2} \in Imf^2$, $\vec{d1} \bigoplus \vec{d2} = \vec{d2} \bigoplus \vec{d1}$.
(*Lorsque deux translations se réalisent l'une après l'autre, permuter leur ordre ne change pas le point d'arrivée (la première étant toujours munie du point de départ O)*)

12. La partie "Toute extension non nulle est dans deux vecteurs dont l'un est de signe + et l'autre de signe -" est valide à condition que cela ne contredise aucune nouvelle contrainte à venir (puisque Imf est le plus grand possible) - ce qui sera le cas
13. A ce stade de notre étude, il convient de remarquer que notre espace fait du simple caractère interne de la loi + relative aux nombres réel quelque chose qui implique des propriétés d'ordres et additives à la fois (relatives à Π i.e. aux extensions).

Une condition équivalente est que $+_\Pi$ soit commutative, c'est-à-dire $\forall e, e' \in \Pi^2, e + e' = e' + e.$[14] (remarquons en particulier que l'ordre des deux opérandes $\vec{d1}$ et $\vec{d2}$ de $\bigoplus$ n'a pas d'importance si leurs signes sont différents et donc seul le cas où les vecteurs ont un même signe, i.e. seule la première ou quatrième disjonction de cas, est à considérer).
(*Joindre deux extensions se fait dans un ordre quelconque*)

Preuve Supposons que + (relative à $\mathbb{R}$) est commutative. Dès lors, $\bigoplus$ est commutative par isomorphisme. Soient e, e' $\in \Pi^2$. Si e ou e' est nulle, alors e + e' = e' + e (par définition de l'élément neutre). Sinon, soient e et e' non nulles. e et e' sont dans deux vecteurs qu'on peut choisir de mêmes signes $\vec{d1}$ et $\vec{d1}'$. $\vec{d1} \bigoplus \vec{d1}' = \vec{d1}' \bigoplus \vec{d1}$ donne directement e + e' = e' + e (cf. égalité sur la première composante des triplets). Finalement, $\forall e, e' \in \Pi$, e + e' = e' + e, i.e. + (relative à Π) est commutative.

Réciproquement, supposons que $+_\Pi$ (relative à Π) est commutative. Soient deux vecteurs $\vec{d1}, \vec{d1}' \in Imf^2$. Si un des deux est nul (par exemple sans perdre de généralité $\vec{d1}$), alors $\vec{d1} \bigoplus \vec{d1}' = \vec{d1}' = \vec{d1}' \bigoplus \vec{d1}$ (par définition de l'élément neutre). Sinon, ils ont deux extensions et signes non nuls. Si les deux signes sont égaux, alors le 1er cas de la disjonction de cas s'applique. $\vec{d1} \bigoplus \vec{d1}' = \vec{d1} \bigoplus \vec{d1}'$ car e + e' = e' + e et les signes sont égaux. Si les deux signes sont strictement différents, $\vec{d1} \bigoplus \vec{d1}' = \vec{d1} \bigoplus \vec{d1}'$ car dans les deux cas le vecteur résultant est celui dont l'extension est la plus grande extension des deux vecteurs moins la plus petite et le signe est déterminé de manière identique dans les deux cas. Par suite, $\forall \vec{d1}, \vec{d1}' \in Imf^2, \vec{d1} \bigoplus \vec{d1}' = \vec{d1} \bigoplus \vec{d1}'$.

$\bigoplus$ associative $\forall \vec{d1}, \vec{d2}, \vec{d3} \in Imf^3$, $\vec{d1} \bigoplus (\vec{d2} \bigoplus \vec{d3}) = (\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \bigoplus \vec{d3}$.
(*Faire suivre une translation $\vec{d1}$ d'une translation résultant de ($\vec{d2}$ suivi de $\vec{d3}$) est équivalent à faire suivre la translation résultant de ($\vec{d1}$ suivi de $\vec{d2}$) par la translation $\vec{d3}$*)
La condition équivalente est l'associativité de $+_\Pi$
(Joindre e et e"-jointe-à-e"' donne une extension égale à e-jointe-à-e" et e"' : e + e" + e"'.)

Remarque : le fait d'associer une somme de 3 extensions à une longueur scindée en 3 points suffit à représenter l'associativité de $+_\Pi$ puisque l'ordre des jointures d'extensions se redéfinit intuitivement librement. Lorsque l'associativité est considérée avec des vecteurs de signes quelconques, des vecteurs ordonnés (i.e. il existe un premier, un second, un troisième,...) scindent un résultat en se superposant éventuellement. Le résultat doit alors être indépendant des réoganisations se produisant si deux vecteurs successifs sont évalués sommés ensemble.

Preuve Le fait que l'associativité de + (relative à $\mathbb{R}$) implique l'associativité de + (relative à Π) est trivial. En effet, en prenant trois extensions quelconques, traiter trivialement le cas où au moins une est nulle. Sinon, prendre les extensions non nulles dans des vecteurs de mêmes signes, et conclure à partir de l'égalité sur la première composante . Montrons réciproquement que l'ajout de la condition d'associativité de + (relative à Π) est suffisante (pour avoir $\bigoplus$ associative (et donc + (relative à $\mathbb{R}$) associative)). Soient $\vec{d1} = (e_1, \theta_1, \sigma_1), \vec{d2} = (e_2, \theta_1, \sigma_2), \vec{d3} = (e_3, \theta_1, \sigma_3) \in Imf^3$. Si un des vecteurs est nul, alors la propriété est triviale. Sinon, les vecteurs sont tous non nuls. Soit ils ont tous le même signe, soit pas. Supposons que tous les vecteurs ont le même signe. Dans ce cas, soit ce signe commun est +, soit c'est -. Prenons le égal à +. Dans ce cas, $\vec{d1} \bigoplus (\vec{d2} \bigoplus \vec{d3})$= $(e_1 + (e_2 + e_3), \theta_1, +)$ et $(\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \bigoplus \vec{d3}) = ((e_1 + e_2) + e_3), \theta_1, +)$. Puisque que + (relative à Π) est associative, alors $\vec{d1} \bigoplus (\vec{d2} \bigoplus \vec{d3}) = (\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \bigoplus \vec{d3}$. De même si le signe commun est -. Considérons maintenant le cas où les signes sont différents (et toujours tous non nuls). Par commutativité de $\bigoplus$, nous pouvons traiter le seul cas où $signe(\vec{d1}) = signe(\vec{d2}) \neq signe(\vec{d3})$. En effet, $\vec{d1} \bigoplus (\vec{d2} \bigoplus \vec{d3}) = (\vec{d2} \bigoplus \vec{d1}) \bigoplus \vec{d1} = (\vec{d3} \bigoplus \vec{d3}) \bigoplus \vec{d1}$ et $(\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \bigoplus \vec{d3} = \vec{d3} \bigoplus (\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) = \vec{d1} \bigoplus (\vec{d1} \bigoplus \vec{d3})$. Donc, le rôle de $\vec{d1}$ et $\vec{d3}$ peut être permuté si besoin et le vecteur de signe égal à celui de $signe(\vec{d2})$ peut être placé en première position. Supposons σ_1 = -,σ_2 = -, σ_3 = +. Soit $e_1 + e_2 = e_3$, soit $e_1 + e_2 < e_3$, soit $e_1 + e_2 > e_3$. Supposons $e_1 + e_2 = e_3$. Dans ce cas, $(\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \bigoplus \vec{d3} = (e_1 + e_2, \theta_1, -) \bigoplus (e_3, \theta_1, +) = (0, \theta_1, +-)$ et $\vec{d1} \bigoplus (\vec{d2} \bigoplus \vec{d3}) = (e_1, \theta_1, -) \bigoplus (e3 - e2, \theta_1, +) = (0, \theta_1, +-)$, d'où $\vec{d1} \bigoplus (\vec{d2} \bigoplus \vec{d3}) = (\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \bigoplus \vec{d3}$. Supposons $e_1 + e_2 < e_3$. Dans ce cas, $(\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \bigoplus \vec{d3} = (e_1 + e_2, \theta_1, -) \bigoplus (e_3, \theta_1, +) = (e3 - (e_1 + e_2), \theta_1, +)$, de plus $\vec{d1} \bigoplus (\vec{d2} \bigoplus \vec{d3}) = (e_1, \theta_1, -) \bigoplus (e3 - e2, \theta_1, +)$. car par hypothèse, $\exists e' \neq 0, (e1 + e2) + e' = e3$ donc en utilisant l'associativité et commutativité de $+_\Pi$, $(e_1 + e_2) + e' = (e_2 + e_1) + e' = e_2 + (e_1 + e') = e_3$ donc $e_3 > e_2$. De plus, $e_1 + e' = e_3 - e_2$ donc $e_1 < e_3 - e_2$. Dès lors, $\vec{d1} \bigoplus (\vec{d2} \bigoplus \vec{d3}) = ((e_3 - e_2) - e_1, \theta_1, +)$. On a aussi : $(e_1 + e_2) + ((e3 - e_2) - e_1) = ((e3 - e_2) - e_1) + (e_1 + e_2) = (((e3 - e_2) - e_1) + e_1) + e_2$= $(e3 - e_2) + e_2$= e_3

14. Joindre une extension e' et e ou e et e' donne une même extension e + e'.

en utilisant la commutativité et l'associativité, donc $(e3-e_2)-e_1=(e3-(e_2+e_1)$. D'où, $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3}) = (\vec{d1}\bigoplus\vec{d2})\bigoplus\vec{d3}$. Supposons maintenant, $e_1+e_2>e_3$. Dans ce cas, $[[(\vec{d1}\bigoplus\vec{d2})\bigoplus\vec{d3} = (e_1+e_2,\theta_1,-)\bigoplus(e_3,\theta_1,+) = ((e_1+e_2)-e3,\theta_1,-)]]$ (nous mettons le résultat entre crochet car le résultat est utilisé à 3 reprises par la suite, i.e. nous ramenons $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3})$ à cette expression à 3 reprises). Soit $e_2<e_3$, $e_2>e_3$, soit $e_2=e_3$. Si, $e_2=e_3$, alors $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3}) = \vec{d1}\bigoplus\vec{0} = (e_1,\theta_1,-) = ((e_1+e_2)-e_2,\theta_1,-)$ (en utilisant la commutativité), donc $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3}) = (\vec{d1}\bigoplus\vec{d2})\bigoplus\vec{d3}$. Supposons, $e_2>e_3$, $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3}) = (e_1,\theta_1,-)\bigoplus(e_2-e_3,\theta_1,-) = (e_1+(e_2-e_3),\theta_1,-)$. Or, $e_3+(e_1+(e_2-e_3)) = (e_1+(e_2-e_3))+e_3 = e_1+((e_2-e_3)+e_3) = e_1+(e_3+(e_2-e_3)) = e_1+e_2$ en utilisant la commutativité puis associativité, puis la définition de (e_2-e_3). Dès lors, $e_3+(e_1+(e_2-e_3)) = (e_1+e_2)-e3$ puis $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3}) = (\vec{d1}\bigoplus\vec{d2})\bigoplus\vec{d3}$. Enfin, si $e_3>e_2$, $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3}) = (e_1,\theta_1,-)\bigoplus(e_3-e_2,\theta_1,+)$. $e_1+e_2>e_3$ implique $e_1>e_3-e_2$ avec l'associativité et la commutativité. Donc, $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3}) = (e_1-(e_3-e_2),\theta_1,-)$. Il reste à montrer $(e_1+e_2)-e_3 = e_1-(e_3-e_2)$ pour obtenir le résultat. Ajoutons $((e_3-e_2)+e_3)$ à chacune des expressions et utilisons l'associativité et la commutativité de + : $((e_3-e_2)+e_3)+((e_1+e_2)-e_3) = (e_3-e_2)+(e_3+((e_1+e_2)-e_3) = (e_3-e_2)+(((e_1+e_2)-e_3)+e_3) = (e_3-e_2)+(e_1+e_2)= (e_1+e_2)+(e_3-e_2) = e_1+(e_2+(e_3-e_2)) = e_1+((e_3-e_2)+e_2) = e_1+e_3$. De même, $((e_3-e_2)+e_3)+(e_1-(e_3-e_2)) = (e_1-(e_3-e_2))+((e_3-e_2)+e_3) = ((e_1-(e_3-e_2))+(e_3-e_2))+e_3) = e_1+e_3$. Dès lors, $(e_1+e_2)-e_3 = e_1-(e_3-e_2) = e_1+e_3-((e_3-e_2)+e_3)$. Donc, $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3}) = (\vec{d1}\bigoplus\vec{d2})\bigoplus\vec{d3}$. Finalement, en procédant de la même manière dans le cas où σ_1 = +,σ_2 = +, σ_3 = -, $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3}) = (\vec{d1}\bigoplus\vec{d2})\bigoplus\vec{d3}$ pour tout $\vec{d1},\vec{d2},\vec{d3}$ d'après le seul ajout de l'associativité.

Réécriture de l'antisymétrie de $\leq_\Pi$ comme la réci-absorbance de 0 Nous avons établi que l'antisymétrie de $\leq_\Pi$ était une des conditions nécessaires pour que $\bigoplus$ soit interne. L'antisymétrie de $\leq_\Pi$ s'écrivait ainsi : $(\forall e,e'\in\Pi^2,\exists e''\in\Pi, e=e'+e'' et \exists e'''\in\Pi, e+e'''=e' \Rightarrow e=e')$. Depuis, nous avons obtenu de nouvelles conditions sur $+_\Pi$ (associativité et commutativité). Ce sont des outils que nous pouvons utiliser pour réécrire les anciennes conditions que nous avons établies. L'antisymétrie est équivalente à plusieurs conditions plus commodes : $(\forall e,e'\in\Pi^2,\exists e'',e=e'+e'' et \exists e''',e+e'''=e'\Rightarrow e=e')$ (i) $\Leftrightarrow$ $(\forall e,e'\in\Pi^2,(e+e'=0\Rightarrow e=0\ ou\ e'=0))$ (0 est réci-absorbant) (ii) $\Leftrightarrow$ 0 est le plus petit élément de Π (iii)

(Un couple d'extensions dont la première est une partie de la seconde et la seconde une partie de la première est un couple d'extensions égales) .
$\Leftrightarrow$
(Si la somme de deux extensions est nulle, alors au moins l'une des deux est nulle).
$\Leftrightarrow$
(L'extension nulle est la plus petite extension).

Preuve (i) $\Rightarrow$ (ii)
Supposons que $\forall e,e'\in\Pi^2,\exists e'',e=e'+e'' et \exists e''',e+e'''=e'\Rightarrow e=e'$ (i). Soient e et e' tels que e + e' = 0. Nous avons également e = 0 + e. Dès lors, d'après (i), e = 0 . Donc (ii) est prouvé.
(ii) $\Rightarrow$ (iii)
En utilisant un raisonnement par l'absurde, supposons que 0 n'est pas le plus petit élément de Π. Alors, il existe e un élément appartenant à Π et différent de 0 et e' un autre élément appartenant à Π tels que e + e' = 0. D'après (ii), e = 0 ou e' =0. Puisque e=0 est absurde par hypothèse, alors e' = 0. Supposons que e'=0, alors e + 0 = 0, puis e=0 (par définition de l'élément neutre 0). Or, e=0 est absurde.Par suite l'hypothèse que 0 n'est pas le plus petit de Π est absurde et 0 est bien le plus petit élément de Π.
(iii) $\Rightarrow$ (i)
Soient e, e', e",e"' $\in\Pi^4$ tels que e = e' + e" (1) et e + e"' = e' (2). Supposons (iii) et montrons e= e'. En remplaçant e dans (2) d'après (1), nous avons (e' + e") + e"' = e'. En utilisant l'associativité, nous avons e ' + (e" + e"') = e'. De plus, nous avons à notre disposition la propriété suivante : $\forall e,e'\in\Pi^2,\exists! e''\in\Pi,(e+e''=e')ou(e'+e''=e)$ (3) (propriété établie dans la section " $\bigoplus$ est interne"). Dès lors, en remarquant e' + 0 = e', nous avons e ' + (e" + e"') = e' et e' + 0 = e'. La propriété (3) nous permet d'identifier (e" + e"') et 0 car il existe une unique extension qui jointe à e' est égale à e'. Par suite, e" + e"' = 0. D'après (iii), cela donne e" = e"' = 0. L'expression (1) donne par suite e = e' + e" = e' + 0 = e'. D'où e = e'.
(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) donc toutes les conditions sont équivalentes.

3.2 (Corps) totalement ordonné

Beaucoup de conditions qui rendent vrais les axiomes de la relation d'ordre $\bigotimes$ ont déjà été posées. Cela vient du fait que $\bigoplus$ est construite à partir des mêmes briques logiques que $\bigotimes$ (c'est-à-dire l'addition des extensions $+_\Pi$ - utilisée éventuellement de manière à définir $\leq_\Pi$). Dans le cas où un axiome relatif à $\bigotimes$

est déjà vrai grâce à nos conditions précédentes, nous pourrons toujours préciser comment les logiques des composantes s'intègrent dans la hierarchie totale : "composantes -> translations -> points -> droite". En particulier, l'interprétation de $\bigoplus$ a tendance à symétriser les nombres autour du 0. L'interprétation de $\bigotimes$ quant à elle décentre grandement la représentation en réalisant une scission gauche/droite "le long de la droite des nombres réels" [15]. Pour rappel, la comparaison a été décrite à partir de logiques propres aux composantes de la façon suivante :

Soient $\vec{d_1} = (e, \theta, \sigma)$, $\vec{d_1}' = (e', \theta, \sigma') \in Imf^2$

$\vec{d_1} \bigotimes \vec{d_1}' \Leftrightarrow (\sigma = -$ et $\sigma' = +)$ ou $(e \leq e'$ et $\sigma =_1 \sigma' =_1 +)$ ou $(e' \leq e$ et $\sigma =_1 \sigma' =_1 -)$

Note : Les titres donnés aux sections font références aux axiomes des nombres réels. Cependant, puisque nous sommes dans un moment du document dans lequel nous omettons les axiomes relatifs à la multiplication $\times$, alors les axiomes d'un (corps) totalement ordonné restants sont ceux d'un groupe totalement ordonné. Par suite, le titre "corps totalement ordonné" n'aurait pas été aligné avec contenu de la section et c'est pourquoi (Corps) a été mis entre parenthèses.

$\bigotimes$ **est reflexive** $\forall \vec{d1} \in Imf, \vec{d1} \bigotimes \vec{d1}$.
(un point d'arrivée est à droite de lui même (à droite se définit au sens large))

Il faut et suffit d'admettre la reflexivité de $\leq_\Pi$, ou encore $\forall e \in \Pi, \exists e' \in \Pi, e +_\Pi e' = e$. Dès lors, une autre CNS (condition nécessaire et suffisante) est la condition vide (True) car les équivalences établies lorsque nous avons traité le cas "$\bigoplus$ admet un élément neutre" donnaient dejà des conditions plus fortes (cf. $\forall e \in \Pi$, e + 0 = e)
(Aucune nouvelle condition ne doit être ajoutée)

Preuve La réflexivité de $\leq_\Pi$ (relative à Π) est déjà nécessaire. Montrons que nos conditions précédentes sont déjà suffisantes pour établir la réciproque. Soit $\vec{d1} = (e, \theta_1, \sigma) \in Imf$. Puisque $signe(\vec{d1}) = signe(\vec{d1})$ et $e \leq_\Pi e$ (cf. réflexivité de $\leq_\Pi$ (relative à Π)) (cf. e + 0 =e), alors $\vec{d1} \bigotimes \vec{d1}$ (d'après le 2ème ou 3ème cas de la "disjonction de cas"). D'où, $\bigotimes$ est réflexive (puis $\leq_\mathbb{R}$ est réflexive par isomorphisme remontant de Imf vers $\mathbb{R}$ puisqu'il préserve la relation d'ordre par hypothèse).

$\bigotimes$ **est antisymétrique** $\forall \vec{d1}, \vec{d2} \in Imf^2$, $\vec{d1} \bigotimes \vec{d2}$ et $\vec{d2} \bigotimes \vec{d1} \Rightarrow \vec{d1} = \vec{d2}$
(deux points vérifiant que le premier est à droite du second et que le second est à droite du premier sont identiques)

L'hypothèse de l'antisymétrie ne peut être vraie si les triplets ont des signes différents. Aussi, cf. cas restant dans la description de $\bigotimes$, il faut et suffit que : $\leq_\Pi$ soit antisymétrique ($\forall e, e' \in \Pi$, e $\leq_\Pi$ e' et e' $\leq_\Pi$ e $\Rightarrow e = e'$). Une autre CNS est donc la condition vide (True) car les équivalences établies lorsque nous avons traité le cas "$\bigoplus$ est interne" donnaient dejà des conditions plus fortes. (nous avons en particulier montré depuis que l'antisymétrie de $\leq_\Pi$ était équivalente à la réci-absorbance de 0 (relative à $+_\Pi$))
(Aucune nouvelle condition ne doit être ajoutée)

Preuve Montrons que nos conditions précédentes sont déjà suffisantes. Soient $\vec{d1} = (e1, \theta_1, \sigma_1), \vec{d2} = (e2, \theta_1, \sigma_2) \in Imf^2$. Supposons $\vec{d1} \bigotimes \vec{d2}$ et $\vec{d2} \bigotimes \vec{d1}$. On a signe($\vec{d1}$) $=_1$ signe($\vec{d2}$) car sinon une des deux inégalités ne serait pas vérifiée. Dès lors, soit le deuxième cas de la "disjonction de cas", soit le troisième cas de la "disjonction de cas" s'applique pour établir à la fois $\vec{d1} \bigotimes \vec{d2}$ et à la fois $\vec{d2} \bigotimes \vec{d1}$. Dans tous les cas, nous avons e1 $\leq_\Pi$ e2 et e2 $\leq_\Pi$ e1. Par antisymétrie de $\leq$ (relative à Π), nous avons e1 = e2. De plus, puisque les signes ne sont pas différents, cela implique $\vec{d1} = \vec{d2}$. Dès lors, $\bigotimes$ est antisymétrique

$\bigotimes$ **est transitive** $\forall \vec{d1}, \vec{d2}, \vec{d3} \in Imf^3, \vec{d1} \bigotimes \vec{d2}$ et $\vec{d2} \bigotimes \vec{d3} \Rightarrow \vec{d1} \bigotimes \vec{d3}$
(un point plus à droite qu'un second - qui est lui même plus à droite qu'un troisième - est à droite de ce troisième point.)

15. Car l'interprétation découle de la hiérarchie descendante "droite -> points -> translations -> composantes". Cf. partie 7. du document pour plus de détail.

Il est nécessaire et suffisant que $\leq_\Pi$ soit transitive . En revenant à la définition de $\leq_\Pi$ comme l'abréviation utilisant $\exists$ et $+_\Pi$, il est suffisant que $+_\Pi$ soit associative et interne. Une autre condition équivalente est donc la condition vide (True) (les équivalences établies lorsque nous avons traité le cas "$\bigoplus$ est associative" donnaient déjà des conditions plus fortes).
(Aucune nouvelle condition ne doit être ajoutée)

Preuve Montrons que nos conditions précédentes sont déjà suffisantes. Soient $\vec{d1} = (e_1, \sigma_1, \theta_1), \vec{d2} = (e_2, \sigma_2, \theta_1), \vec{d3} = (e_3, \sigma_3, \theta_1) \in Imf^3$ tels que $\vec{d1} \otimes \vec{d2}$ et $\vec{d2} \otimes \vec{d3}$. Soit $signe(\vec{d1}) = -$ et $signe(\vec{d3}) = +$, soit $signe(\vec{d1}) =_1 signe(\vec{d3})$ (le cas $signe(\vec{d1}) = +$ et $signe(\vec{d3}) = -$ est interdit pour des raisons immédiates). Si $signe(\vec{d1}) = -$ et $signe(\vec{d3}) = +$, alors $\vec{d1} \otimes \vec{d3}$ d'après le 1er cas de la "disjonction de cas". Sinon, on trouve que nécessairement $signe(\vec{d2}) =_1 signe(\vec{d1})$ (car si ce n'est pas le cas, alors $signe(\vec{d1}) = -$ et $signe(\vec{d2})$=+ puis $signe(\vec{d3})$=+ donc le cas est traité) . Supposons que $signe(\vec{d2}) =_1 signe(\vec{d1}) =_1 +$. $\vec{d1} \otimes \vec{d2}$ nous donne $\exists e' \in \Pi, e_1 + e' = e_2$ (1). De même, $\vec{d2} \otimes \vec{d3}$, donne $\exists e'', e_2 + e'' = e_3$ (2). Finalement, en remplaçant (1) dans (2), nous avons $\exists e', e'' \in \Pi^2, (e_1 + e') + e'' = e_3$. Puisque + (relative à Π) est associative, nous avons $\exists e', e'' \in \Pi^2, e_1 + (e' + e'') = e_3$. Etant donné que $(e' + e'') \in \Pi$ (cf. + interne), nous avons $\exists e''', e_1 + e''' = e_3$ (e"' = e' + e"), i.e. $e_1 \leq e_3$. Nous avons ainsi $\vec{d1} \otimes \vec{d3}$. On montre la même conclusion de manière analogue si on suppose $signe(\vec{d2}) =_1 signe(\vec{(d1)}) =_1 -$. Dès lors, $\otimes$ est transitive.

$\otimes$ est totale $\forall \vec{d1}, \vec{d2}, \in Imf^2, (\vec{d1} \otimes \vec{d2}) ou (\vec{d2} \otimes \vec{d1})$
(pour tout couple de vecteurs (i.e., en accord avec notre contexte , ceux décrivant la droite des nombres réels et dont le point de départ est l'origine), un de leur point d'arrivée est à droite de l'autre)

Deux vecteurs qui ont des signes distincts sont automatiquement en relation. Il reste à considérer le cas où les vecteurs ont le même signe, ce qui donne une condition nécessaire et suffisante : $\forall e, e' \in \Pi^2, \exists e'' \in \Pi, (e + e'' = e')$ ou $(e' + e'' = e)$. (i.e. $\leq$ est totale sur Π). Une autre CNS est une condition vide car les équivalences établies lorsque nous avons traité le cas "$\bigoplus$ est interne" donnaient déjà des conditions plus fortes
(Aucune nouvelle condition ne doit être ajoutée)

Preuve Triviale

Compatibilité de $\otimes$ avec $\bigoplus$ $\forall \vec{d1}, \vec{d2}, \vec{d3} \in Imf^3, (\vec{d1} \otimes \vec{d2}) \Rightarrow (\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} \otimes \vec{d2} \bigoplus \vec{d3})$
(si un point d'arrivée est à droite d'un autre, translater les deux par le même vecteur $\vec{d3}$ préserve cette situation pour les nouveaux points d'arrivée.)

Aucune condition a ajouter. A noter qu'il est relativement intuitif que la réorganisation libre des extensions (associativité, commutativité) permet d'obtenir un tel résultat.
(Aucune nouvelle condition ne doit être ajoutée)

Preuve Montrons que les conditions précédentes sont déjà suffisantes. Soient $\vec{d1} = (e_1, \theta_1, \sigma_1), \vec{d2} = (e_2, \theta_1, \sigma_2)$, $\vec{d3} = (e_3, \theta_1, \sigma_3) \in Imf^3$ tels que $\vec{d1} \otimes \vec{d2}$. Si $\vec{d3} = \vec{0}$, la propriété est évidemment vraie. Si $\vec{d1}$=$\vec{d2}$ aussi. Supposons $\vec{d1} \neq \vec{d2}$. Supposons d'abord $signe(\vec{d1}) = signe(\vec{d2}) = signe(\vec{d3}) \neq +-$. Avec le signe commun égal à +, la comparaison donne : $\exists e', e_1 + e' = e_2$ $(e_1 \leq e_2)$. Dès lors, en ajoutant e_3 de chaque côté de l'égalité, par associativité et commutativité de +, $\exists e', (e_1 + e_3) + e' = (e_2 + e_3)$. Donc $(\vec{d1} + \vec{d3} \otimes \vec{d2} + \vec{d3}))$. Supposons maintenant que signe($\vec{d3}$) = - (avec toujours signe($\vec{d1}$) = +, signe($\vec{d2}$) = +). Soit e3 $\leq$ e1, e3 $\leq$ e2, soit e1 $\leq$ e3, e3 $\leq$ e2, soit e1 $\leq$ e3, e2$\leq$ e3 (le cas e3 $\leq$ e1, e2 $\leq$ e3 est exclu car par transitivité de $\leq$ cela donnerait e2 $\leq$ e1 (et donc $e_1 = e_2$ car $e_1 \leq e_2$ et $\leq$ antisymétrique) ce qui est absurde car on a supposé $\vec{d1} \neq \vec{d2}$). Dans le premier cas (e3 $\leq$ e1, e3 $\leq$ e2), $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} = (e1 - e3, \theta_1, +)$, $\vec{d2} \bigoplus \vec{d3} = (e2 - e3, \theta_1, +)$. Par l'absurde, supposons e2-e3 $\leq$ e1-e3. Dans ce cas, ($\exists e'$ e2-e3 + e' = e1 -e3). Dès lors, par commutativité et associativité, $\exists e', (e2 - e3 + e3) + e' = (e1 - e3 + e3)$, i.e. e2 + e' = e1 i.e e2 $\leq$ e1. C'est absurde car on a supposé $\vec{d1} \neq \vec{d2}$. Dès lors, e1-e3 $\leq$ e2 - e3. Par suite, $(\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} \otimes \vec{d2} \bigoplus \vec{d3}))$. Dans le second cas (e1 $\leq$ e3, e3 $\leq$ e2), $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} = (e3 - e1, \theta_1, -)$, $\vec{d2} \bigoplus \vec{d3} = (e2 - e3, \theta_1, +)$. Dès lors, par comparaison des signes, on a directement $(\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} \otimes \vec{d2} \bigoplus \vec{d3}))$. Dans le dernier cas (e1 $\leq$ e3, e2$\leq$ e3), $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} = (e3 - e1, \theta_1, -)$, $\vec{d2} \bigoplus \vec{d3} = (e3 - e2, \theta_1, -)$. On a : e1 + (e3 - e2) + (e2 - e1) = e3. Dès lors, (e3 - e2) + (e2 - e1) = e3 - e1. Donc, $\exists e', e3 - e2 + e' = e3 - e1$. Dès lors, e3 - e2 $\leq$ e3-e1, puis $(\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} \otimes \vec{d2} \bigoplus \vec{d3}))$. De même si nous aurions pris comme signe commun de $\vec{d1}$ et $\vec{d2}$ le signe -. Supposons maintenant que $\vec{d1}$ et $\vec{d2}$ ont deux signes strictement différents. Nécessairement, $\vec{d1}$ = - , $\vec{d2}$ = +. Soit e3 ≤ e1 et e3 ≤ e2, soit e1 ≤ e3 et e3 ≤ e2, soit e3 ≤ e1 et e2≤ e3, e1 ≤ e3 et e2≤ e3, . Si e3 ≤ e1, e3 ≤ e2, alors $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} = (e1 - e3, \theta_1, -)$, $\vec{d2} \bigoplus \vec{d3} = (e2 - e3, \theta_1, +)$. Donc, ($\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} \bigotimes \vec{d2} \bigoplus \vec{d3}$)) (par comparaison du signe). Si, e1 ≤ e3, e3 ≤ e2, soit $\sigma_3 = +$, soit $\sigma_3 = -$. Si $\sigma_3 = +$, $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} = (e3 - e1, \theta_1, +)$, $\vec{d2} \bigoplus \vec{d3} = (e2 + e3, \theta_1, +)$. On a : (e3 - e1) + e1 + e2 = e2 + e3. Dès lors, $\exists e'' \in \Pi, (e3 - e1) + e'' = e2 + e3$. On en déduit e3-e1 ≤ e2 + e3 puis $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} \bigotimes \vec{d2} \bigoplus \vec{d3}$. Si $\sigma_3 = -$, $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} = (e1 + e3, \theta_1, -)$, $\vec{d2} \bigoplus \vec{d3} = (e2 - e3, \theta_1, +)$. Donc, ($\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} \bigotimes \vec{d2} \bigoplus \vec{d3}$)) (par comparaison du signe). Si e3 ≤ e1 et e2≤ e3, soit $\sigma_3 = +$, soit $\sigma_3 = -$. Si $\sigma_3 = +$, $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} = (e1 - e3, \theta_1, -)$, $\vec{d2} \bigoplus \vec{d3} = (e3 + e2, \theta_1, +)$. Donc, ($\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} \bigotimes \vec{d2} \bigoplus \vec{d3}$)) (par comparaison du signe). Si σ_3 = -, $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} = (e3 + e1, \theta_1, -)$, $\vec{d2} \bigoplus \vec{d3} = (e3 - e2, \theta_1, -)$. On a : (e3 - e2) + e2 + e1 = e3 + e1. Dès lors, $\exists e'' \in \Pi, (e3 - e2) + e'' = e3 + e1$. On en déduit e3-e2 ≤ e3 + e1 puis $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} \bigotimes \vec{d2} \bigoplus \vec{d3}$. Si e1 ≤ e3 et e2≤ e3, soit $\sigma_3 = +$, soit $\sigma_3 = -$. Si $\sigma_3 = +$, $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} = (e3 - e1, \theta_1, +)$, $\vec{d2} \bigoplus \vec{d3} = (e2 + e3, \theta_1, +)$. On a : (e3 - e1) + e1 + e2 = e2 + e3. Dès lors, $\exists e'' \in \Pi, (e3 - e1) + e'' = e2 + e3$. On en déduit e3-e1 ≤ e2 + e3 puis $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} \bigotimes \vec{d2} \bigoplus \vec{d3}$.Si $\sigma_3 = -$, $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} = (e1 + e3, \theta_1, -)$, $\vec{d2} \bigoplus \vec{d3} = (e3 - e2, \theta_1, -)$. On a : (e3 - e2) + e2 + e1 = e1 + e3. Dès lors, $\exists e'' \in \Pi, (e3 - e2) + e'' = e1 + e3$. On en déduit e3-e2 ≤ e1 + e3 puis $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} \bigotimes \vec{d2} \bigoplus \vec{d3}$. Il reste à traiter le cas où $\vec{d1}$ ou $\vec{d2}$ est nul, qui est aussi immédiat qu'on peut le penser. Dans tous les cas, $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} \bigotimes \vec{d2} \bigoplus \vec{d3}$. Nous avons donc montré la compatibilité de $\bigotimes$ avec $\bigoplus$ sans hypothèse supplémentaire.

3.3 Archimédien

Archimédien $\forall \vec{d1}, \vec{d2} \bigotimes 0, \vec{d1} \neq \vec{0} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \vec{d2} \bigotimes n\vec{d1}$.
(Prenons deux points P1 et P2 à droite de l'origine. Il est toujours possible d'ajouter le vecteur du point P1 à lui même de manière réitérée de façon à dépasser le point P2)

La condition nécessaire et suffisante est : $\forall e, e', \in \Pi^2, e' \neq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, e \leq ne'$.
(En ajoutant une extension non nulle à elle même de manière réitérée, il est possible de la rendre plus grande que n'importe quelle extension)

Remarque : pour tout couple d'extensions non nulles, les ensembles obtenus en les joignant chacune à elles-mêmes s'encadrent l'un et l'autre.

Preuve Immédiate car les vecteurs de la propriété ont tous un signe positif au sens large. Par suite, l'addition vectorielle transfère ses propriétés de manière transparente à l'addition des extensions.

4 Représentation de la droite des nombres réels usuelle $\mathbb{D}$ avec $(Imf, \bigoplus, \bigotimes\ )$

Nous venons de traiter l'intégration de tous les axiomes relatifs à + et ≤ dans $(Imf, \bigoplus, \bigotimes\ )$ - en se privant de tous les axiomes relatifs à ×. Nous avons pris soin de faire en sorte que $(Imf, \bigoplus, \bigotimes\ )$ appartienne au même langage que $\mathbb{D}$ (le "langage de l'espace euclidien"). Est-ce que $(Imf, \bigoplus, \bigotimes\ )$ contient la droite des nombres réels usuelle $\mathbb{D}$? Nous nous sommes donnés un groupe additif archimédien totalement ordonné $(Imf, \bigoplus, \bigotimes\ )$. Dès lors, $\vec{0}$ est nécessairement dans Imf et par suite l'origine de la droite des nombres réels est contenue dans Imf. Malheureusement, rien n'empêche que le groupe soit réduit à $\vec{0}$, c'est-à-dire au vecteur nul ou à l'origine [16]. Dès lors, des conditions doivent être ajoutées à $(Imf, \bigoplus, \bigotimes\ )$ pour qu'il contienne la droite des nombres réels usuelle.

Ajout de conditions suffisantes pour obtenir la droite des nombres réels usuelle Supposons qu'il existe une extension non nulle $1 \in \Pi \backslash \{0\}$. Dans ce cas, la représentation de $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{D}$ est contenue dans $(Imf, \bigoplus, \bigotimes\ )$. En effet, f($\mathbb{Z}$) se décrit avec des expressions ne supposant que l'existence de l'extension nulle 0 et d'une extension non nulle 1 [17]

16. Imf n'est défini comme le plus grand ensemble vérifiant les conditions équivalentes qu'une fois sa définition achevée c'est-à-dire une fois les axiomes des nombres réels traités.

17. d'autres conditions déjà posées assurent que tout se passe bien. En particulier, $\forall n, m \in \mathbb{N}^2$ tels que $n < m, 1 + ...(n fois)... + 1 \neq 1 + ...(m fois)... + 1$. Sinon, on aurait 1 + ... (m - n fois) ... + 1 = 0 (d'après la "certaine condition d'unicité" : $\forall e, e' \in \Pi^2, \exists! e'' \in \Pi, (e + e'' = e') ou (e' + e'' = e)))$. Puis 1 = 0 (d'après la réci-absorbance de 0). Ce qui serait absurde.

$f(\mathbb{Z}) = \{f(n), n \in \mathbb{Z}\} = \{(1 + (nfois) + 1, \theta_1, -), n \in \mathbb{N}^*\} \cup (0, \theta_1, +-) \cup \{(1 + (nfois) + 1, \theta_1, +), n \in \mathbb{N}^*\}$
(Dans le cas où un entier relatif est strictement positif ou strictement négatif, son extension est obtenue en joignant plusieurs fois à elle même l'extension 1 ; et son signe est + ou - selon. Plus précisément, lorsque l'entier s'écrit : n ou -n, l'extension est jointe n fois à elle même. Dans le cas où l'entier relatif est 0, son extension est 0 et son signe est +-.)
Plutôt que de représenter seulement l'origine, nous représentons désormais tous les entiers relatifs de la droite des nombres réels.

Supposons désormais qu'on puisse diviser toute extension en q parties égales, avec q entier naturel arbitraire. Dans ce cas, la représentation de $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{D}$ est contenue dans $(Imf, \bigoplus, \bigotimes)$. En effet, f($\mathbb{Q}$) se décrit avec des expressions ne supposant que la possibilité supplémentaire de diviser l'extension 1 en q extensions égales.[18] Écrivons le seul cas des nombres rationnels positifs, c'est-à-dire $f(\mathbb{Q}_*^+)$, par soucis de lisibilité.

$f(\mathbb{Q}_*^+) = \{f(\frac{p}{q}), p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^*\} = \{f(\frac{1}{q}) \bigoplus (pfois) \bigoplus f(\frac{1}{q}), p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^*\} = \{(extension(\vec{\frac{1}{q}}) +_\Pi (pfois) +_\Pi extension(\vec{\frac{1}{q}}), \theta_1, +), p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^*\}$ où $extension(\vec{\frac{1}{q}}) +_\Pi (qfois) +_\Pi extension(\vec{\frac{1}{q}}) = 1$ (division de 1 en q longueurs/extensions égales avec q entier arbitrairement grand).

(L'extension d'un nombre rationnel p/q est obtenu en divisant 1 en q extensions égales (1/q) puis en joignant p fois à elle même une telle extension 1/q)
Plutôt que de représenter seulement les entiers relatifs, nous représentons désormais tous les nombres rationnels de la droite des nombres réels.

Enfin, supposons que les extensions sont complètes, i.e.
$\forall (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Pi^{\mathbb{N}}$
$(\forall \epsilon \in \Pi \backslash \{0\}, \exists No \in \mathbb{N}, \forall p > 0, \forall n > No, (max(e_n, e_{n+p}) - min(e_n, e_{n+p}) \leq \epsilon))$
$\Rightarrow$
$(\exists l \in \Pi, \forall \epsilon \in \Pi \backslash \{0\}, \exists No \in \mathbb{N}, \forall n > No, (max(e_n, l) - min(e_n, l) \leq \epsilon))$
où on a posé :
$\forall e, e' \in \Pi^2$, max(e,e') = e si $(\exists e'' \in \Pi, e' + e'' = e)$ et e' sinon.
$\forall e, e' \in \Pi^2$, min(e,e') = e' si $(\exists e'' \in \Pi, e' + e'' = e)$ et e sinon.
(Pour toute suite d'extensions u dont les termes deviennent arbitrairement proches les uns des autres aux voisinages de $+\infty$ des indices de la suite, il existe une extension limite l telle que les termes de u sont arbitrairement proches de l aux voisinages de $+\infty$ des indices de la suite. D'ailleurs, l'extension l est structurée par les lois de compositions et relations définies sur les extensions comme les autres.)

Dans ce cas, pour tout nombre réel x, il est possible de se donner l'extension correspondante en choisissant $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i}{b^i}$ avec $a_0a_1...a_n...$ la suite des entiers qui décrivent x en base b.[19] Toutes les possibilités de développement dans une certaine base sont par suite contenues dans $(Imf, \bigoplus, \bigotimes)$. Peut-on également munir $(Imf, \bigoplus, \bigotimes)$ d'une distance qui attribue une extension à tout couple de nombres ? Posons que la distance d est telle que d(x,y) est égale à extension(x $\bigodot$ y) pour tout x,y dans Imf^2. $(Imf, \bigoplus, \bigotimes)$ contient $\mathbb{D}$.

Conclusion En posant trois nouvelles conditions (existence de 1, possibilité de diviser 1 en q extension égales, complétude des extensions), la droite des nombres réels usuelle $\mathbb{D}$ est contenue dans $(Imf, \bigoplus, \bigotimes)$. Plus précisément, $\mathbb{D}$ est contenue dans $(Imf, \bigoplus, \bigotimes)$-muni-des-trois-nouvelles-conditions : $(Imf, \bigoplus, \bigotimes)^*$. Est-ce que $(Imf, \bigoplus, \bigotimes)^*$ contient davantage que la droite des nombres réels usuelle ? D'abord, $(Imf, \bigoplus, \bigotimes)^*$ est en bijection avec les nombres réels. Tandis que $\mathbb{D}$ projette des nombres réels sur des développements dans certaines bases, $(Imf, \bigoplus, \bigotimes)^*$ projette tous les nombres réels sur des développements dans certaines bases. Ensuite, $(Imf, \bigoplus, \bigotimes)^*$ conserve à la fois la relation d'ordre, la distance et l'addition. $\mathbb{D}$ conserve la relation d'ordre et la distance mais ne conserve pas l'addition. Des phénomènes additifs se retrouvent dans les développements dans certaines bases de $\mathbb{D}$, mais $(Imf, \bigoplus, \bigotimes)^*$ représente de nombreux cas d'additions qui ne sont pas contenus dans $\mathbb{D}$ - en particulier l'addition de deux nombres de signes opposés. Pour ces différentes raisons, $(Imf, \bigoplus, \bigotimes)^*$ contient $\mathbb{D}$ mais aussi d'autres propriétés des nombres réels. Nous avons obtenu une

18. En outre, les nombres rationnels construits sont simplifiables ($\frac{1}{2} = \frac{2}{4}, ...$). En effet, on a la propriété $(\forall e, e' \in \Pi^2, \forall n \in \mathbb{N}, [(e + ...(nfois)... + e) = (e' + ...(nfois)... + e') \Rightarrow e = e']$. La propriété se montre par l'absurde. Supposons $e \neq e'$. Alors sans perdre de généralité e peut être pris plus grand que e'. Dès lors e = e" + e' avec une certaine extension e". Par suite, (e' + ... (n fois) ... + e') + (e" + ... (n fois) ... + e") = e' + ... (n fois) ... + e' (par associativité et commutativité), d'où (e" + ... (n fois) ... + e") = 0 (d'après la certaine condition d'unité) puis e" = 0 (0 est réci-absorbant). Donc e = e'. Ce qui est absurde. Donc e = e'. La propriété est "naturelle" du fait de notre intuition d'un espace homogène.

19. La série converge car la suite $(\sum_{i=0}^{N} \frac{a_i}{b^i})_{N\in\mathbb{N}}$ est "de Cauchy". Les différences des termes sont inférieurs à $\frac{1}{b^n}$ au rang n et une telle suite converge vers 0.

représentation strictement plus avancée de $\mathbb{R}$ que ne l'était $\mathbb{D}$ - toujours dans le langage de l'espace euclidien. Notre étude de la représentation des nombres réels est en bon chemin. Avons nous atteint la fin de notre étude ?

5 Introduction sur un langage adapté à la multiplication

Nous n'avons pas encore traité la multiplication. C'est le cas car la multiplication ne semblait pas compatible avec le langage de l'espace euclidien. En effet, $\otimes$ est construite à partir d'une multiplication définie sur les trois signes +, - et +-. Or dans le langage de l'espace euclidien que nous avons présenté, les trois signes correspondent à trois orientations statiques ("à gauche", "au milieu", "à droite") qui n'emportent aucun principe "transformant" qui permettrait de les munir d'une loi de composition. Avons nous dès lors présenté des nombres réels "sans multiplication" ? En fait, $(Imf, \bigoplus, \bigotimes)^*$ contient des multiplications. L'addition d'un nombre à lui même correspond à une multiplication par un nombre entier positif. De même, la division de l'extension d'un nombre en q parties égales correspond à une division par un nombre entier positif q. En combinant les deux opérations, la multiplication par un nombre rationnel positif semble contenue dans $(Imf, \bigoplus, \bigotimes)^*$. Quelque chose de surprenant est observé toutefois. Même si tout nombre de $(Imf, \bigoplus, \bigotimes)^*$ peut être multiplié par un nombre rationnel, le nombre rationnel multipliant n'est pas lui même issu de $(Imf, \bigoplus, \bigotimes)^*$. En effet, le nombre multiplié est dans la hiérarchie "composantes -> translations -> points -> droite" et correspond à un point identifié. Par contre, le nombre multipliant est un objet relatif à un procédé transformant le nombre multiplié (un procédé constitué d'additions/divisions à réaliser sur le nombre multiplié). Par suite, le nombre multipliant ne serait pas dans la hiérarchie "composantes -> translations -> points -> droite" et donc ne serait pas contenu dans $(Imf, \bigoplus, \bigotimes)^*$. Nous trouvons que la multiplication de notre langage, en plus d'être limitée à une multiplication par des nombres rationnels, est hors du langage de l'espace euclidien - dans un langage plus général contenant des procédés qui manipulent les objets du langage de l'espace euclidien. Peut-on obtenir un langage spatial dans lequel la représentation de $\otimes$ est purement interne et ne fait intervenir qu'un genre de nombre ? D'ailleurs, la multiplication de $(Imf, \bigoplus, \bigotimes)^*$ est restreinte à la multiplication par un nombre rationnel, un nouveau langage permettrait-il d'obtenir une multiplication générale conforme à la multiplication des nombres réels ? Pour rappel la multiplication se donne ainsi :

Multiplication Soient $\vec{d_1}, \vec{d1}' \in Imf^2$

$\vec{d_1} \otimes \vec{d_1}' = (e \times e', \theta 1, \sigma \times \sigma')$

(7)

où $\times \in \Pi^{\Pi \times \Pi}$ est "la multiplication classique définie sur $\mathbb{R}^+$" et $\times \in \Sigma^{\Sigma \times \Sigma}$ est une multiplication de signes telle que :

$$\sigma \times \sigma' = \begin{cases} \sigma & \text{si} & \sigma' = + \\ oppos\acute{e}(\sigma) & \text{si} & \sigma' = - \\ \text{+-} & \text{sinon} & (\sigma' = +-) \end{cases} \tag{8}$$

(Multiplier un signe s par le signe + ne change pas ce signe. Multiplier un signe s par le signe - change le signe s en son opposé. Multiplier un signe s par le signe +- change le signe s en +-)

où opposé est une fonction qui à un signe associe un signe ($oppos\acute{e} \in \Sigma^\Sigma$) définie ainsi :

$$oppos\acute{e}(\sigma) = \begin{cases} \text{-} & \text{si} & \sigma = + \\ + & \text{si} & \sigma = - \\ \text{+-} & \text{sinon} & (\sigma = +-) \end{cases} \tag{9}$$

(L'opposé de + est -. L'opposé de - est +. L'opposé de +- est +-)

Conception des signes compatible avec la multiplication Pour que les signes puissent être multipliés, nous devons concevoir un signe comme "quelque chose qui multiplie". Plus précisément, chaque signe doit être un transformant qui transforme en lui même (auto-référence), en son opposé ou en le signe nul. Si le signe + doit être auto-référent, est-ce que cela signifie que l'orientation " à droite" était "auto-référente" dans l'espace abordé jusqu'ici ? En fait, notre modèle d'espace n'intégrait pas la multiplication et donc l'orientation "à droite" ne référait ni à elle même, ni à son opposée (" à gauche"), ni au signe nul (" au milieu "). Puisque les signes n'étaient que ceux de $(Imf, \bigoplus, \bigotimes)^*$, ils n'avaient pas besoin de référer à d'autres signes. Du fait de notre ambition de représenter la multiplication, les signes doivent désormais être identifiés à des transformations d'autre signes. Note : les signes sont donc des transformations de transformations. La particularité de ces transformations est qu'elles sont toutes contraintes à être une transformation en soi même, en l'opposé ou en une transformation nulle. De plus, le support de ces transformations de transformations est également limité aux trois transformations de transformations +, - et +-. Nous traiterons un peu plus bas le problème de la compatibilité de cette conception des signes avec le langage de la droite des nombres réels usuelle.

Conception des extensions compatible avec la multiplication Contrairement à la jointure d'extension qui fait intervenir des termes et sommes de même nature dans le langage de l'espace euclidien, nous avons constaté que la multiplication paraissait inhomogène et problématique. En effet, une multiplication semble être l'application d'un procédé à une extension afin d'obtenir une extension. Par exemple, pour multiplier une extension e par n, il suffit de joindre n fois l' extension e à elle-même. Le nombre multipliant n est relatif à un procédé et le nombre multiplié e est relatif à une extension. Une multiplication utiliserait alors deux types de nombre différents ce qui menacerait l'unité du langage et sa contenance en lui même. Si l'extension multipliante n doit être rendue homogène à l' extension multipliée e, alors un procédé de construction d'extension doit être rendu homogène à une extension. Est-ce une conception désirable et acceptable ? Si les extensions sont des procédés, alors l'inhomogénéité vue en exemple disparaîtrait. En effet, dans ce cas, multiplier une extension e par n reviendrait à construire un nouveau procédé (la jointure réitérée de e) en se servant d'un premier procédé e ; tout serait homogène à un procédé. Faire d'une extension un procédé pose cependant les problèmes : - du choix du procédé ; - de la réduction des extensions à un type ou une famille de procédés. Dans le langage formel, les nombres sont définis par une structure générative munie de contraintes qui contrôle les procédés (les axiomes des nombres réels) et non pas par des procédés eux même. Peut-on néanmoins s'éloigner du langage formel et définir les extensions par des procédés ? Soit e une extension, quels seraient les procédés qui définiraient e ? e pourrait être décrite par les développements dans certaines bases qui ont déjà été présentés dans l'étude de la droite des nombres réels usuelle $\mathbb{D}$. Ces procédés consistent en la division de l'extension unité en parties égales, en la jointure réitérée de telles parties, et en la jointure éventuellement infinie de telles constructions. Ces procédés restent mal définis par le fait qu'ils dépendent de la base du développement choisie. Est-ce que le choix d'une base fixerait le problème ? Est-ce que le développement dans une certaine base choisie (par exemple b=10) serait un procédé idéal et naturel pour décrire des extensions ? Sans même considérer le problème de l'unicité du développement dans une certaine base choisie, les extensions des nombres rationnels sont sans doute plus simplement décrites par le procédé qui transforme l'unité en son représentant p/q (division de l'unité en q parties égales et jointure de p telles parties) . Notre analyse de cas montre que définir des familles de procédés qui s'identifieraient aux extensions est problématique et probablement réducteur. Peut-on néanmoins généraliser suffisamment la notion de procédé ? Quel est le point commun des différents procédés que nous avons proposés pour définir les extensions ? Les procédés sont relatifs à une unité 1. De même, les extensions de la droite des nombres réels usuelle sont naturellement toutes relatives à une unité 1. Par suite, pour unifier les différents concepts d'extensions rencontrés, nous allons concevoir les extensions comme des procédés très généraux. Toute extension est une transformation d'une extension unité. La transformation n'a pas à être définie selon un procédé déterminé mais doit simplement être issue d'une structure générative munie de contraintes qui dépend d'une unité.

Récapitulatif Afin de multiplier les nombres entre eux dans un espace contenu en lui-même, nous devons plonger l'espace dans un langage dans lequel les signes et extensions peuvent être multipliés et restent chacuns homogènes à eux-mêmes. Nous avons remarqué que dès lors tout signe doit devenir une transformation en lui même, en son opposé ou en le signe nul. De plus, toute extension doit être conçue comme une transformation d'une extension unité 1. Par suite, tout nombre peut se définir comme une transformation de son unité (transformation du signe de son unité et transformation de l'extension de son unité). Dès lors, la multiplication devient possible entre tout nombre. En effet,un produit est obtenu lorsqu'un nombre multiplié devient l'unité du nombre multipliant. Par exemple, π^2 est π construit à partir de l'unité temporaire π - évalué comme une transformation de l'unité originelle 1. Passons maintenant à l'étude des axiomes relatifs à la multiplication restants.

6 Etude des axiomes relatifs à $+, \times et \leq$ restants

Représentation de $\times \in \Sigma^{\Sigma\times\Sigma}$ Nous supposons toujours que le signe est conservé. La multiplication des signes est donc décrite par la loi de composition interne $\times_\Sigma$. Le signe est par suite représenté par le fait que le signe conserve, modifie en l'opposé ou rend nul le signe de son unité.

Autre remarque préliminaire Tout nombre est une transformation de son unité. La transformation est décomposable en transformation d'extension et transformation de signe. Dès lors, nous rejetons à priori une définition des nombres purement relative à leurs voisinages (i.e. relative aux nombres qui les entourent).

Ou plutôt, une telle définition n'est valable qu'à condition que le voisinage soit lui même défini et présenté relativement à son unité.

6.1 Groupe (abélien) selon ($\otimes$, $\vec{1}$) avec $\vec{1} \neq \vec{0}$

$\otimes$ est commutative $\forall \vec{d1}, \vec{d2} \in Imf^2, \vec{d1} \otimes \vec{d2} = \vec{d2} \otimes \vec{d1}$
(Choisir d'exprimer un vecteur en faisant jouer à un autre le rôle d'unité temporaire résulte en une même transformation de l'unité originelle que si on choisit d'exprimer l'autre vecteur en faisant jouer au premier le rôle d'unité temporaire)

CNS $= \times_\Pi$ est commutative.
(Choisir d'exprimer une extension en faisant jouer à une autre le rôle d'unité temporaire résulte en une même transformation de l'extension unité originelle que si on choisit d'exprimer l'autre extension en faisant jouer à la première le rôle d'unité temporaire)

Il existe $\vec{1}$ neutre pour $\otimes$ tel que $\vec{1} \neq \vec{0}$ $\forall \vec{d1} \in Imf, \vec{d1} \otimes \vec{1} = \vec{1} \otimes \vec{d1} = \vec{d1}$
(Il existe une unité vectorielle originelle auto-référente telle que tout vecteur est une transformation de cette unité et telle toute transformation par cette unité laisse un vecteur invariant)

CNS $= \times_\Pi$ admet un élément neutre 1 dans $\Pi \backslash \{0\}$
(Il existe une extension unité originelle auto-référente telle que toute extension est une transformation de cette unité et telle toute transformation par cette unité laisse une extension invariante)

Remarque : finalement $f(1) = (1, \theta 1, +)$
(*L'unité vectorielle est un vecteur dont l'extension est l'unité et dont le signe est la transformation auto-référente +*)

$\otimes$ est interne (ou principe d'homogénéisation)

$$\forall \vec{d_1}, \vec{d_2} \in Imf^2, \exists! \vec{d_3} \in Imf, \vec{d_1} \otimes \vec{d_2} = \vec{d_3}$$

(*Exprimer un vecteur en faisant jouer à un autre vecteur le rôle d'unité temporaire détermine un vecteur dans le système de l'unité originelle (i.e. une transformation de l'unité originelle). Les vecteurs peuvent se "composer" et être appliqués les uns aux autres.*)
CNS : $\times_\Pi$ est interne
(*Exprimer une extension en faisant jouer à une autre extension le rôle d'unité temporaire détermine une extension dans le système de l'unité originelle (i.e. une transformation de l'unité originelle). Les extensions peuvent se "composer" et être appliquées les unes aux autres.*)

$\otimes$ est associative $\forall \vec{d1}, \vec{d2}, \vec{d3} \in Imf^3$, $\vec{d1} \otimes (\vec{d2} \otimes \vec{d3}) = (\vec{d1} \otimes \vec{d2}) \otimes \vec{d3}$.
(*Transformer $\vec{d1}$ avec le vecteur ($\vec{d3}$ transformant $\vec{d2}$) ($\vec{d2} \otimes \vec{d3}$) résulte en le même vecteur que le vecteur $\vec{d3}$ transformant ($\vec{d2}$ transformant $\vec{d1}$) ($\vec{d1} \otimes \vec{d2}$).Par suite, l'ordre d'évaluation de telles transformations ne doit pas avoir d'importance.*)

CNS : $\times_\Pi$ est associative.
(*Transformer l'extension e_1 avec l'extension (e_3 transformant e_2) ($e_2 \times e_3$) résulte en la même extension que l'extension e_3 transformant (e_2 transformant e_1) ($e_1 \times e_2$).Par suite, l'ordre d'évaluation de telles transformations ne doit pas avoir d'importance.*)

Un élément non nul admet un inverse $\forall \vec{d1} \in Imf \backslash \{\vec{0}\}, \exists \vec{d2} \in Imf, \vec{d1} \otimes \vec{d2} = \vec{d2} \otimes \vec{d1} = \vec{1}$. Si un tel $\vec{d2}$ convient, il peut être noté $\vec{d1}^{-1}$
(Pour tout vecteur $\vec{d1}$ non nul, il existe un vecteur $\vec{d1}^{-1}$ qui transformé par $\vec{d1}$ correspond à l'unité. Note : de même, $\vec{d1}$ transformé par $\vec{d1}^{-1}$ correspond à l'unité.)

CNS : toute extension e $\in \Pi\backslash\{0\}$ admet un élément symétrique pour $\times$ dans Π. Notons le $\frac{1}{e}$.
(Pour toute extension non nulle e, il existe l'extension 1/e qui une fois transformée par e, correspond à l'unité.)

Remarque : en considérant le signe, on a finalement $\forall x \in \mathbb{R}^* \ f(x^{-1}) = (\frac{1}{extension(f(x))}, \theta 1, signe(f(x)))$
(Pour tout nombre décomposé, le nombre décomposé inverse a : - l'extension inverse de ce nombre ; - le même signe que ce nombre.)

A noter que la "division en parties égales" que nous avons utilisée pour établir une première représentation des nombres réels $(Imf, \bigoplus, \bigotimes)^*$ est un cas particulier de ce principe. En effet, c'est bien n jointures réitérées d'une même extension (soit une représentation de l'extension de l'entier n) rendues égales à une extension unité que l'on considérait pour représenter l'extension 1/n. Par suite, la multiplication par un nombre rationnel est également donnée (en effet, la division en parties égales d'une extension est donnée. Il suffit alors de joindre à elles-mêmes de telles parties - et de changer le signe au besoin - pour multiplier par un nombre rationnel quelconque). Une différence notable avec la multiplication utilisée dans $(Imf, \bigoplus, \bigotimes)^*$ est que la multiplication actuelle fait intervenir un seul genre de nombre.

6.2 Distributivité et compatibilité

$\bigotimes$ est distributive par rapport à $\bigoplus$ $\forall \vec{d1}, \vec{d2}, \vec{d3} \in Imf^3, (\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \bigotimes \vec{d3} = (\vec{d1} \bigotimes \vec{d3}) \bigoplus (\vec{d2} \bigotimes \vec{d3})$
(Transformer un vecteur $\vec{d3}$ par la somme de deux vecteurs $\vec{d1}$ et $\vec{d2}((\vec{d1} \bigoplus \vec{d2})$) résulte en le même vecteur que le vecteur $\vec{d3}$ transformé par $\vec{d1}$ ajouté au vecteur $\vec{d3}$ transformé par $\vec{d2}$)

CNS : $\times_\Pi$ est distributive par rapport à $+_\Pi$.
(prenons une somme de deux extensions (e1 + e2) comme extension unité. Appliquons lui une autre extension e3 (c'est-à-dire multiplions là par e3). Le résultat doit être le même que si nous avions appliqué e3 à e1, e3 à e2 et que nous avions sommé les résultats respectifs. Remarque : de même, si nous souhaitons appliquer e2+e3 à e1, nous pouvons appliquer e2 à e1 et e3 à e1 - et sommer les résultats respectifs.)
Note : la distributivité au niveau des extensions donne immédiatement la distributivité vectorielle dans le cas où $\vec{d1}$ et $\vec{d2}$ ont le même signe. Dans le cas où ils ont des signes différents, il faut assurer qu'appliquer $\vec{d3}$ à $\vec{d1}$ et à $\vec{d2}$ donne deux vecteurs de signes différents (si $\vec{d3}$ est non nul) qui se somment en un vecteur égal au vecteur $\vec{d3}$ appliqué à $\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}$.[20]

Preuve Supposons que $\times$ est distributive par rapport à + dans $\mathbb{R}$. Alors par morphisme, $\bigotimes$ l'est par rapport à $\bigoplus$. Soient trois extensions e1,e2,e3. Si au moins l'une d'entre elle est nulle, alors $(e1 + e2) \times e3 = e1 \times e3 + e2 \times e3$ trivialement (il suffit de justifier e $\times$ 0 = 0 par la conservation du signe). Sinon, prenons ces extensions dans des vecteurs $\vec{d1}, \vec{d2}, \vec{d3}$ non nuls de même signe positif + . Puisque $(\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \bigotimes \vec{d3} = (\vec{d1} \bigotimes \vec{d3}) \bigoplus (\vec{d2} \bigotimes \vec{d3})$, alors $(e1 + e2) \times e3 = e1 \times e3 + e2 \times e3$ par égalité sur la première composante. Donc $\times$ est distributive par rapport à + dans Π.

Réciproquement, supposons $\times$ est distributive par rapport à + dans Π. Soient trois vecteurs $\vec{d1}, \vec{d2}, \vec{d3}$.Si au moins l'un d'entre eux est nul $(\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \bigotimes \vec{d3} = (\vec{d1} \bigotimes \vec{d3}) \bigoplus (\vec{d2} \bigotimes \vec{d3})$. Sinon, soit $\vec{d1}$ et $\vec{d2}$ ont le même signe, soit leurs signes sont distincts. Si leurs signes sont les mêmes, $(e1 + e2) \times e3 = e1 \times e3 + e2 \times e3$ assure $(\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \bigotimes \vec{d3} = (\vec{d1} \bigotimes \vec{d3}) \bigoplus (\vec{d2} \bigotimes \vec{d3})$ d'après la première disjonction de cas de $\bigoplus$. Sinon, prenons signe($\vec{d1}$)=+ et signe($\vec{d2}$)=-. Soit e1=e2, soit e1 < e2, soit e2 < e1. Si e1=e2, signe($\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}$) = +-, puis $signe((\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \bigotimes \vec{d3}) = +-$. Comme +- n'est associé qu'à $\vec{0}$, $(\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \bigotimes \vec{d3} = \vec{0}$. Puisque $\vec{d1} \bigotimes \vec{d3}$ et $\vec{d2} \bigotimes \vec{d3}$ ont la même extension $(e1 \times e3)$ et des signes opposés quoi que soit $\vec{d3}$, alors $\vec{d1} \bigotimes \vec{d3}$ est l'opposé de $\vec{d2} \bigotimes \vec{d3}$ et leur somme est nulle. Finalement, $(\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \bigotimes \vec{d3} = (\vec{d1} \bigotimes \vec{d3}) \bigoplus (\vec{d2} \bigotimes \vec{d3}) = \vec{0}$. Si e2 < e1, alors $\exists e_{1-2} \in \Pi\backslash\{0\}, e2 + e_{1-2} = e1$. $((\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \bigotimes \vec{d3}) = (e_{1-2} \times e3, \theta 1, + \times signe(\vec{d3}))$. De plus, $(\vec{d1} \bigotimes \vec{d3}) \bigoplus (\vec{d2} \bigotimes \vec{d3})$ $= (e1 \times e3, \theta 1, signe(\vec{d3})) \bigoplus (e2 \times e3, \theta 1, oppos\acute{e}(signe(\vec{d3})))$. Or, du fait de la distributivité de $\times$ par rapport à +, $(e2 + e_{1-2}) \times e3 = e1 \times e3$ donne $(e2 \times e3) + (e_{1-2} \times e3) = e1 \times e3$, donc $(e2 \times e3) \leq e1 \times e3$ et $(e2 \times e3) - (e1 \times e3) = (e_{1-2} \times e3)$. D'où, $(\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \bigotimes \vec{d3} = (\vec{d1} \bigotimes \vec{d3}) \bigoplus (\vec{d2} \bigotimes \vec{d3}) = (e_{1-2} \times e3, \theta 1, signe(\vec{d3}))$. Nous raisonnons de manière analogue dans le cas où e1 < e2. Par commutativité de $\bigoplus$, le cas où signe($\vec{d1}$)=-

20. Lorsque la distributivité est représentée dans le cas où $\vec{d1}$ et $\vec{d2}$ ont des signes distincts, le plus naturel est sans doute de représenter les deux translations $\vec{d1}$ et $\vec{d2}$ non pas se succédant mais partant toutes deux de l'origine O.

et signe($\vec{d2}$)=+ est également traité. D'où distributivité de $\otimes$ par rapport à $\oplus$ dans tous les cas.

Remarque : la distributivité est en fait une condition nécessaire pour avoir "la division en parties égales" car elle assure qu'une extension d'un nombre entier n peut se distribuer en $e +_{\Pi} ...(nfois)... +_{\Pi} e$ sur son extension multipliée e. La distributivité fait qu'une transformation d'une unité peut s'exprimer comme une somme de transformations d'une unité. Cela capture les nombres rationnels comme des transformations d'une unité. Par suite, la complétude fait de l'adhérence des nombres rationnels des transformations possibles et la propriété d'archimède restreint toutes les transformations possibles à l'adhérence des nombres rationnels.

$\oslash$ est compatible avec $\otimes$ $\forall \vec{d_1}, \vec{d_2} \oslash \vec{0}, (\vec{d_1} \otimes \vec{d_2}) \oslash \vec{0}$
(Si deux vecteurs sont positifs, alors leur produit est positif)
Propriété immédiatement vérifiée car elle se réduit à un problème de signe. Puisque la multiplication par un signe positif au sens large correspond à une conservation du signe ou passage au signe +-, alors le produit de deux nombres de signes positifs au sens large a un signe positif au sens large. [21]

7 Distance et complétude

La droite des nombres réels usuelle $\mathbb{D}$ était munie d'une distance. Pour la décrire formellement dans $(Imf, \oplus, \oslash)^*$, nous avons écrit que la distance d était telle que : d(x,y) est égale à extension(x $\ominus$ y). La distance étant alors constituée d'extensions, elle appartiendrait au langage de l'espace euclidien. De plus, la distance d semble raisonnable puisqu'elle correspond à la distance d du langage formel qui est telle que $d_{\mathbb{R}}(x, y)$ = | x - y | pour tout couple de nombres réels x et y. En fait, puisque le lien entre Imf et le langage de l'espace euclidien est le vecteur repérant les points de la droite des nombres réels à partir de l'origine, les extensions n'ont pas d'autre place que dans des vecteurs repérant un point à partir de l'origine. Par suite, extension(x $\ominus$ y) serait une extension d'un vecteur répérant un point à partir de l'origine. Est-ce le cas ? L'extension d(x,y) qui sépare x et y n'est pas extraite d'un vecteur attaché à l'origine O mais est plutôt extraite "entre" les points x et y. La distance d que nous avons décrite appartiendrait donc "mal" à notre langage de l'espace euclidien. Malgré tout, il n'est absolument pas surprenant de trouver des extensions entre des points et le seul problème possible serait que notre langage ait été mal décrit. Est-il simple d'apporter une correction ? Peut-on simplement déclarer que les extensions peuvent également se trouver entre des points ? Un aspect délicat est que nous avons caractérisé notre langage par le fait qu'il maintient une hiérarchie "composantes -> translations -> points -> droite". Une telle hiérarchie fait sens à condition que les composantes soient indépendantes des points. En effet, "->" prend la signification de "construit" ou "précède". Si, comme nous l'avons précisé jusqu'à présent, les points sont définis à partir de vecteurs attachés à une origine O, alors les points se définissent bien à partir des composantes. Cependant, si des extensions sont obtenues à partir de couples de points, notre hiérarchie semble retournée sur elle même. A-t-on mal caractérisé notre langage ? En fait, la hiérarchie "composantes -> translations -> points -> droite" qui construit des points à l'aide de composantes à partir d'une origine génère une autre hiérarchie descendante " droite -> points -> translations -> composantes". Des points quelconques sont alors séparés par des translations qui possèdent chacune une extension (distance) et un signe (comparaison). Est-ce que les hiérarchies sont générées l'une et l'autre simultanément ? Dans le langage formel, les nombres réels $\mathbb{R}$ sont définis avec une hiérarchie "droite -> points" dont peuvent dériver les niveaux "-> translations -> composantes". Une spécificité du langage de l'espace euclidien semble être que la hiérarchie "composantes -> translations -> points -> droite" précède la hiérarchie "droite -> points" et que par suite "droite -> points" redescend systématiquement vers "droite -> points -> translations -> composantes " du fait qu'elle s'appuie sur "composantes -> translations -> points -> droite". Si le langage géométrique/euclidien ne dépendait pas d'une hiérarchie "composantes -> translations -> points -> droite", alors sa représentation des nombres réels aurait pu être réduite à "droite -> points" tout comme c'est le cas dans le langage formel - ce qui n'est pas le cas. Pour ces raisons, "composantes -> translations -> points -> droite" semble bien "précèder ontologiquement" "droite -> points -> translations -> composantes" dans le langage de l'espace euclidien et cela explique que nous avons d'abord étudié "composantes -> translations -> points -> droite". Malgré tout, les deux hiérarchies existent simultanément et se recouvrent l'une et l'autre une fois dans la droite des nombres réels. Nous devons alors rendre compte formellement de la hiérarchie descendante "droite -> points -> translations -> composantes ".

Pour décrire formellement la hiérarchie "droite -> points -> translations -> composantes ", et donc la distribution des extensions et signes "entre les points", nous pouvons décrire d'existence d'une fonction p

21. La propriété raconte des choses intéressantes à condition de considérer également la distributivité et la compatibilité de la comparaison avec l'addition cf. $(\vec{d_1} \ominus \vec{d_2}) \otimes \vec{d_3} \oslash \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{d_1} \otimes \vec{d_3}) \ominus (\vec{d_2} \otimes \vec{d_3}) \oslash \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{d_1} \otimes \vec{d_3}) \oslash (\vec{d_2} \otimes \vec{d_3})$

(points) telle que :

$$p : Imf \to Imp \subset (Imf)^{Imf}$$
$$x \mapsto \begin{array}{rcll} p(x) & : & Imf & \to & Imp(x) \subset Imf \\ & & y & \mapsto & (extension(x \ominus y), \theta 1, signe(y \ominus x)) \end{array}$$

(Il existe une fonction p qui a tout point de Imf associe une fonction p(x) qui associe elle-même a tout point de Imf une extension, une direction et un signe. p(x) est donc un point "devenu indépendant" de l'origine O)

Notre espace est maintenant bien muni de points entre lesquels les éléments de Π, Θ, Σ se distribuent. La distance d devient telle que d(x,y)= extension(p(x)(y)) = extension(x $\ominus$ y). La distance n'est donc pas strictement issue d'une norme | . | = extension(.) comme dans le langage formel, mais elle correspond à la distance issue de cette norme modulo l'omission du point p(x).

Complétude $\mathbb{R}$ est complet car toute suite de Cauchy converge dans $\mathbb{R}$, i.e. toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall \epsilon > 0, \exists No \in \mathbb{N}, \forall p > 0, \forall n > No, |u_n - u_{n+p}| < \epsilon$ vérifie qu'il existe l $\in \mathbb{R}$ tel que : $\forall \epsilon > 0, \exists No \in \mathbb{N} \forall n > No, |u_n - l| < \epsilon$.

Puisque la complétude concerne des voisinages de n'importe quel nombre, le domaine d'intuition le plus naturel est celui des points. Qu'est-ce qu'une suite convergente ? Une suite convergente peut être interprétée comme une suite de points qui tend à approximer avec une précision arbitraire une valeur cible (un point cible). Il ne faut toutefois garder du concept d'approximation que le fait que la suite peut devenir arbitrairement précise sur un voisinage de $+\infty$ (des indices ordonnant la suite), et rien d'autre (elle n'est pas nécessairement de plus en plus précise en particulier). Qu'est-ce qu'une suite de Cauchy ? Une suite de Cauchy est une suite de points qui tend à approximer avec une précision arbitraire rien de déterminé ($\forall \epsilon > 0, \exists No \in \mathbb{N}, \forall p > 0, \forall n > No, |u_n - u_{n+p}| < \epsilon$). Nous retrouvons le principe des suites convergentes sans le point cible. Pour constituer un espace complet, il est donc nécessaire de considérer que toute suite d'approximations constituée de points (chacun associé à un élément de Imf (extension-direction-signe)) approxime en fait un point (associé à un élément de Imf (extension-direction-signe)). Par suite, l'adhérence d'une suite ne sort pas des (extension-finie/direction/signe)s de Imf que nous avons structurés.

Nous venons de décrire la complétude à partir de la hiérarchie descendante "droite -> points -> translations -> composantes". La hierarchie descendante s'appuie sur la hierarchie régulatrice : "composantes -> translations -> points -> droite". Quelles sont les conditions à poser sur les composantes pour obtenir ce résultat ? La condition équivalente est que les extensions soient complètes, i.e.
$\forall (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Pi^{\mathbb{N}}$
$(\forall \epsilon \in \Pi \backslash \{0\}, \exists No \in \mathbb{N}, \forall p > 0, \forall n > No, (max(e_n, e_{n+p}) - min(e_n, e_{n+p}) \leq \epsilon))$
$\Rightarrow$
$(\exists l \in \Pi, \forall \epsilon \in \Pi \backslash \{0\}, \exists No \in \mathbb{N}, \forall n > No, (max(e_n, l) - min(e_n, l) \leq \epsilon))$
où on a posé :
$\forall e, e' \in \Pi^2$, max(e,e') = e si $(\exists e'' \in \Pi, e' + e'' = e)$ et e' sinon.
$\forall e, e' \in \Pi^2$, min(e,e') = e' si $(\exists e'' \in \Pi, e' + e'' = e)$ et e sinon.

(Pour toute suite d'extensions u dont les termes deviennent arbitrairement proches les uns des autres aux voisinages de $+\infty$ des indices de la suite, il existe une extension limite l telle que les termes de u sont arbitrairement proches de l aux voisinages de $+\infty$ des indices de la suite. D'ailleurs, l'extension l est structurée par les lois de compositions et relations définies sur les extensions comme les autres.)

8 Représentation de la droite des nombres réels usuelle $\mathbb{D}$ avec $(Imf, \oplus, \otimes, ⓧ , | . |)$

$(Imf, \oplus, \otimes)$ contenait $\mathbb{D}$ à l'aide de trois conditions supplémentaires. En traitant les axiomes relatifs à ⓧ (ainsi que la complétude), nous avons obtenu ces conditions. En effet, l'existence d'une extension 1 différente de 0 est nécessaire pour obtenir l'existence de l'élément neutre $\vec{1}$ de ⓧ (différent de $\vec{0}$). La division de 1 en q extensions égales avec q un nombre entier s'obtient d'après l'existence de l'inverse de $\vec{q}$=(1 + ... (q fois) ... + 1, θ_1, +) . Enfin, la complétude des extensions a également été posée pour obtenir la complétude de $(Imf, \oplus, \otimes$, ⓧ , | . |). Dès lors, $\mathbb{D}$ est contenue dans $(Imf, \oplus, \otimes$, ⓧ , | . |).

En fait, $\mathbb{D}$ est logiquement contenue dans $(Imf, \bigoplus, \otimes, \textcircled{x}, |\,.\,|)$ mais il reste à savoir si son langage est inclus dans le nouveau langage établi. Afin d'obtenir une multiplication qui est contenue dans le langage de l'espace euclidien, nous avons fait des signes des transformations de transformations. Nous nous sommes également donnés des extensions relatives à une unité qui peuvent se composer les unes avec les autres (d'après un principe de "changement temporaire d'unité"). Est-ce que $\mathbb{D}$ telle qu'on la concevait est toujours contenue dans $(Imf, \bigoplus, \otimes, \textcircled{x}, |\,.\,|)$?

Dans le langage de $\mathbb{D}$ (ou $(Imf, \bigoplus, \otimes)^*$), chaque composante était un "état". Les signes étaient les trois états "à gauche", "au milieu", "à droite". Les extensions étaient quant à elles différents états "1", "2", "1/2" ou encore "$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i}{b^i}$". Puisque ces états coexistaient, certains principes différenciant établissaient des différences entre eux. Comment les différents états établissaient-ils leur différence ? Quoi que soient les manières qu'avaient les extensions d'être différentes, les familles d'extensions dépendaient d'une unité (sous un mode bijectif). Dès lors, tous les principes différenciant les extensions peuvent se ré-écrire comme des transformations d'une unité. Les extensions telles qu'on les concevaient étaient donc incluses dans notre nouveau langage. Qu'en est-il des signes ? Puisque les trois signes du langage de $\mathbb{D}$ dépendaient ensemble d'une origine et d'une direction, les trois états étaient liés et dépendants les uns des autres. Même si les trois signes correspondaient à un ensemble de trois états liés, correspondaient-ils aux trois transformation de transformation possibles ? (auto-référence, passage à l'opposé ou passage à la transformation nulle). En fait, une transformation de transformation qui transforme "en acte" et non "en puissance" dépend de la transformation transformée. Or, modulo la transformation transformée, l'auto-référence est égale à toutes les transformations possibles. Le passage à l'opposé est également égal à toutes les transformations possibles. La transformation nulle est quant à elle la seule transformation égale à elle-même. Les transformations ne sont différentes que lorsque la transformation transformée est choisie égale à + ou à - (le cas +- est quant à lui dégénéré). Les trois états "à gauche", "au milieu", "à droite" ne pouvaient par suite correspondre qu'à une photographie des transformations de transformations avec une transformation transformée fixée à + ou -. Note : nous avons besoin de transformations "en acte" pour que le langage ne dépende d'aucun opérateur externe appliquant les transformations.

Comment résumer $\mathbb{D}$ au sein du langage de $(Imf, \bigoplus, \otimes, \textcircled{x}, |\,.\,|)$? En résumé, $\mathbb{D}$, ou plus précisement $(Imf, \bigoplus, \otimes)^*$, est constitué de toutes les extensions transformant l'unité originelle et de tous les signes transformant l'auto-référence $+$. C'est une transformation conventionnelle qui recouvre l'espace modulo la relation d'égalité. En quoi $(Imf, \bigoplus, \otimes, \textcircled{x}, |\,.\,|)$ diffère-t-il de $(Imf, \bigoplus, \otimes)^*$? $(Imf, \bigoplus, \otimes, \textcircled{x}, |\,.\,|)$ contient une multiplication générale algébriquement conforme à celle des nombres réels. Par comparaison, $(Imf, \bigoplus, \otimes)^*$ était compatible avec une multiplication par un nombre rationnel qui était externe à $(Imf, \bigoplus, \otimes)^*$. La multiplication est-elle la seule nouveauté apportée par $(Imf, \bigoplus, \otimes, \textcircled{x}, |\,.\,|)$? Du fait que l'addition $\bigoplus$ et la comparaison $\otimes$ de $(Imf, \bigoplus, \otimes, \textcircled{x}, |\,.\,|)$ sont compatibles avec la multiplication $\textcircled{x}$, alors $\bigoplus$ et $\otimes$ sont en fait davantage conformes à $+$ et $\leq$ de $\mathbb{R}$ que ne l'étaient $\bigoplus$ et $\otimes$ de $(Imf, \bigoplus, \otimes)^*$. Enfin, la distance $|\,.\,|$ a été mieux intégrée dans le langage de l'espace euclidien car $(Imf, \bigoplus, \otimes, \textcircled{x}, |\,.\,|)$ formalise la possibilité pour les points de définir un réseaux de points séparés par des translations. Un dernier point notable est que le langage de $(Imf, \bigoplus, \otimes, \textcircled{x}, |\,.\,|)$ est toujours indépendant car il est constitué de transformations internes - l'espace est toujours une totalité *a priori.*

9 Réécriture et remarques

La définition formelle de la comparaison que nous avons utilisée était :

Comparaison La comparaison $\otimes$ est la relation définie sur Imf telle que : Soient $\vec{d_1} = (e, \theta, \sigma)$, $\vec{d_1}' = (e', \theta, \sigma') \in Imf^2$

$\vec{d_1} \otimes \vec{d_1}' \Leftrightarrow (\sigma = -$ et $\sigma' = +)$ ou $(e \leq e'$ et $\sigma =_1 \sigma' =_1 +)$ ou $(e' \leq e$ et $\sigma =_1 \sigma' =_1 -)$

L'intuition de cet objet est centré puisque le cas de la comparaison des points de part et d'autre de l'origine est traité spécifiquement. Au contraire, l'intuition naturelle de la comparaison est celle d'un point "plus à droite" qu'un autre où qu'il soit. Établissons une autre définition équivalente qui n'est plus centrée :

Définition équivalente La comparaison $\otimes$ est la relation définie sur Imf telle que : Soient $\vec{d_1} = (e, \theta, \sigma)$, $\vec{d_1}' = (e', \theta, \sigma') \in Imf^2$

$\vec{d_1} \otimes \vec{d_1}' \Leftrightarrow \text{signe}(\vec{d_1}' \bigoplus - \vec{d_1}) =_1 +$

où $-\vec{d_1} = (e, \theta_1, opposé(\sigma))$

Preuve La première définition de $\otimes$ utilisée est équivalente car elle réalise une disjonction de cas de celle-ci suivant les signes de $\vec{d_1}$ et $\vec{d_1}'$. La première disjonction de cas correspond à signe($\vec{d_1}$) $\neq_1$ signe($\vec{d_1}'$), la deuxième à signe($\vec{d_1}$) $=_1$ signe($\vec{d_1}'$) $=_1$ +, la troisième à signe($\vec{d_1}$) $=_1$ signe($\vec{d_1}'$) $=_1$ -.

Nous avons décrit les nombres décomposés comme des transformations de leur unité. Les nombres du langage de l'espace euclidien peuvent-ils vraiment toujours correspondre à des éléments de $\mathbb{R}$? Nous avons $\forall x \in (Imf, \bigoplus, \otimes, \otimes, |.|), x =_2 \{(y, f^{-1}(x), y \times f^{-1}(x)), y \in \mathbb{R}\}$ avec $=_2$ une certaine relation d'équivalence utilisée pour se donner x dans le langage de l'espace euclidien. L'unité transformée variable y semble éloigner x d'un nombre réel. En choisissant l'unité transformée égale à 1 toutefois, on a $\forall x \in (Imf, \bigoplus, \otimes, \otimes, |.|), x =_2 \{(1, f^{-1}(x), 1 \times f^{-1}(x))\}$. Par suite, $=_2$ devient une égalité avec le nombre réel $f^{-1}(x)$. Le principe que toutes les transformations sont évaluées comme des transformations d'une unité originelle 1 assure que les nombres du langage de l'espace euclidien correspondent à des nombres réels.

Pourquoi, dans notre langage, les nombres sont-ils multipliés à leur unité et non pas ajoutés à leur origine ? Pourquoi choisir qu'un nombre est une transformation de son unité plutôt qu'une transformation de son origine ? D'abord, l'origine ne détermine pas les nombres. Remarquons notamment que le groupe engendré par l'origine est réduit à l'origine ; l'origine est de plus absorbante selon $\times_\Pi$ et $\times_\Sigma$; l'origine est enfin réci-absorbante selon $+_\Pi$ et $\times_\Pi$. En fait, chaque nombre non nul qui se construit à partir de $\vec{0}$ se construit lui-même comme une unité potentielle par rapport à $\vec{0}$. Pour ces raisons, les nombres ne peuvent être déterminés par rapport à leur origine. Les nombres sont en revanche bien déterminés par rapport à leur unité. Devrions-nous néanmoins définir les nombres comme des transformations de leur origine pour qu'ils puissent "se composer" additivement (en changeant temporairement d'origine) ? Cela ne paraît pas nécessaire car l'invariance de l'espace par translation [22] distribue déjà ce principe dans notre langage.

Pour récapituler avec de gros traits le lien entre les axiomes des nombres réels et les nombres réels, tout nombre est une transformation d'une unité. Du fait de la distributivité, une transformation d'unité peut s'exprimer comme une somme de transformations d'unité. Nous savons que l'unité se transforme elle-même en elle-même et donc qu'elle appartient aux nombres réels. La somme réitérée de l'unité appartient aux nombres réels car l'addition est une loi de composition interne. Ces sommes réitérées sont des transformations d'unité qui correspondent aux nombres entiers naturels non nuls du fait principalement de la "certaine condition d'unité". L'origine est posée comme l'élément neutre et donc les entiers naturels appartiennent aux nombres réels. Par symétrie, les entiers relatifs sont obtenus (existence du signe opposé/du nombre opposé). En inversant ces entiers, nous divisons l'unité en parties égales et en ajoutant à elle-mêmes les parties obtenues nous obtenons les nombres rationnels. De plus, la complétude assure que les suites de Cauchy des nombres rationnels ont des limites incluses dans les nombres réels (ou encore que les bornes supérieures des ensembles de nombres rationnels sont incluses dans les nombres réels). Finalement, la propriété d'archimède permet de construire toute transformation d'unité comme une limite de nombres rationnels. Dès lors, l'adhérence des nombres rationnels qui appartenait déjà aux nombres réels forme l'ensemble des nombres réels.

22. (ou encore la hiérarchie descendante "droite -> points -> translations -> composantes")

10 Conclusion

Résumé sur la droite des nombres réels usuelle La droite des nombres réels usuelle, conçue comme une figure rectiligne graduable, exprime l'existence d'un objet $\mathbb{D}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{D}, x \in \mathbb{D}$$

($\mathbb{D}$ est un ensemble)

$$\exists d, \forall x, y \in \mathbb{D}^2, d(x,y) \in \{extensions\} \simeq \mathbb{D}^+$$

($\mathbb{D}$ admet "une distance")

$$\exists \leq, \forall x, y \in \mathbb{R}^2, x \leq y \ ou \ y \leq x$$

($\mathbb{D}$ est "ordonné")

$$\forall x \in \mathbb{D}, \exists s \in \{0,1\}, \exists a_0 \in \{0,1,2,...,1000,...\}, \exists b \in \mathbb{N}, b > 1, \exists (a_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \{0,1,...,b-1\}^{\mathbb{N}},$$

$$x = (-1)^s (a_0 + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ...) = (-1)^s \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i}{b^i}$$

(Les éléments de $\mathbb{D}$ admettent des développements dans des bases arbitraires)

les propriétés sont en outre simultanées et *compatibles* les unes avec les autres.

Définition des nombres réels décomposés Soit $\Sigma = \{+, -, +-\}$

Soit opposé $\in \Sigma^{\Sigma}$:

$$oppose(\sigma) = \begin{cases} \text{-} & \text{si} & \sigma = + \\ + & \text{si} & \sigma = - \\ \text{+-} & \text{sinon} & (\sigma = +-) \end{cases} \tag{10}$$

Soit $\times \in \Sigma^{\Sigma \times \Sigma}$:

$$\sigma \times \sigma' = \begin{cases} \sigma & \text{si} & \sigma' = + \\ oppose(\sigma) & \text{si} & \sigma' = - \\ \text{+-} & \text{sinon} & (\sigma' = +-) \end{cases} \tag{11}$$

Soit $\Theta = \{\theta_1\}$
Soit Π un ensemble muni de deux lois de compositions internes + et $\times$.
Soit $\mathbb{T} = \Pi \times \Theta \times \Sigma$ où $\times$ est le produit cartésien
Soient extension $\in \Pi^{\mathbb{T}}$, direction $\in \Theta^{\mathbb{T}}$, signe $\in \Sigma^{T}$ telles que $\forall t \in \mathbb{T}, t = (extension(t), direction(t), signe(t))$
Soit $\mathbb{R}$ le plus grand sous ensemble de $\mathbb{T} = \Pi \times \Theta \times \Sigma$ tel que :
$\exists 0 \in \Pi, \forall e \in \Pi, e + 0 = 0 + e = e$
$\forall e, e' \in \Pi^2, e + e' = 0 \Rightarrow e = e' = 0$
$\forall e, e' \in \Pi^2$, $e + e' = e' + e$.
$\forall e, e', e'' \in \Pi^3$, $e + (e' + e'') = (e + e') + e''$.
$\forall e, e' \in \Pi^2, e \times e' = e' \times e$
$\exists 1 \in \Pi, 1 \neq 0, \forall e \in \Pi, e \times 1 = e$
$\forall e \in \Pi \backslash \{0\}, \exists e' \in \Pi, e \times e' = 1$
$\forall e, e', e'' \in \Pi^3$, $e \times (e' \times e'') = (e \times e') \times e''$.
$\forall e, e', e'' \in \Pi^3$, $e \times (e' + e'') = (e \times e') + (e \times e'')$.
$\forall e, e' \in \Pi^2, \exists! e'' \in \Pi, (e + e'' = e') ou (e' + e'' = e)$
$\forall e, e', \in \Pi^2, e' \neq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists e'' \in \Pi, e + e'' = ne'$

$\forall (e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Pi^{\mathbb{N}}$
($\forall \epsilon \in \Pi \backslash \{0\}, \exists No \in \mathbb{N}, \forall p > 0, \forall n > No, (max(e_n, e_{n+p}) - min(e_n, e_{n+p}) \leq \epsilon)$)
$\Rightarrow$
($\exists l \in \Pi$, $\forall \epsilon \in \Pi \backslash \{0\}, \exists No \in \mathbb{N}, \forall n > No, (max(e_n, l) - min(e_n, l) \leq \epsilon)$)

$\forall x \in \mathbb{R}$ extension(x) = 0 $\Leftrightarrow$ signe(x) = +-

où ont été utilisées par commodité :
$\forall e, e' \in \Pi^2, e \leq e' \Leftrightarrow \exists e'' \in \Pi, e + e'' = e'$.
$\forall e, e' \in \Pi^2, e - e'$ est défini et égal à e" $\Leftrightarrow e' + e'' = e$. où $e'' \in \Pi$
$\forall e, e' \in \Pi^2$, max(e,e') = e si $(\exists e'' \in \Pi, e' + e'' = e)$ et e' sinon.
$\forall e, e' \in \Pi^2$, min(e,e') = e' si $(\exists e'' \in \Pi, e' + e'' = e)$ et e sinon.

Proposition ($\mathbb{R}$,$\bigoplus$,$\otimes$, $\lessdot$,|.|) est un corps totalement ordonné archimédien et complet, où :
Soient $x = (e, \theta_1, \sigma), x' = (e', \theta_1, \sigma') \in \mathbb{R}^2$

$$x \bigoplus x' = \begin{cases} (\text{e + e'}, \theta_1, \sigma) & \text{si} \quad \sigma =_1 \sigma',\ \sigma \neq +- \\ (\text{e - e'}, \theta_1, \sigma) & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e' \leq e, e \not\leq e' \\ (\text{e' - e}, \theta_1, \sigma') & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e \leq e', e' \not\leq e \\ (\text{e + e'}, \theta_1, \sigma') & \text{si} \quad \sigma =_1 \sigma',\ \sigma = +- \\ (\text{e - e'}, \theta_1, +-) & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e \leq e', e' \leq e \end{cases} \tag{12}$$

$$x \otimes x' = (e \times e', \theta_1, \sigma \times \sigma') \tag{13}$$

$$x \lessdot x' \Leftrightarrow signe(x' \ominus x) =_1 + \tag{14}$$

$$|x| = extension(x) \tag{15}$$

où ont été utilisées par commodité :
$=_1$ est une relation définie sur les signes telle que seuls + et - sont distincts.
$\forall x \in \mathbb{R}$, -x = (extension(x),direction(x), opposé(signe(x)) et $\forall x \in \mathbb{R}$, "$\bigoplus$ (- x)" peut être réécrit $\ominus$x

Preuve cf. sens réciproque des preuves

Proposition ($\mathbb{R}$,$\bigoplus$,$\otimes$, $\lessdot$,|.|) contient la droite des nombres réels usuelle.
où la distance d ne serait pas simplement telle que d(x,y) = | x $\ominus$ y | mais plutôt telle que d(x,y) = extension(p(x)(y)) = | x $\ominus$ y | avec :

$$\begin{array}{cccc} p & : & \mathbb{R} & \rightarrow & Imp \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ & & x & \mapsto & \begin{array}{cccc} p(x) & : & \mathbb{R} & \rightarrow & Imp(x) \subset \mathbb{R} \\ & & y & \mapsto & (extension(x \ominus y), \theta 1, signe(y \ominus x)) \end{array} \end{array}$$

Preuve cf. vérification de la compatibilité des différents objets avec le langage de la droite des nombres réels usuelle et cf. reproduction de la structure logique de la droite des nombres réels usuelle dans ($\mathbb{R}$,$\bigoplus$,$\otimes$, $\lessdot$,|.|)

Réécriture supplémentaire $\forall (e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Pi^{\mathbb{N}}$
($\forall \epsilon \in \Pi \backslash \{0\}, \exists No \in \mathbb{N}, \forall p > 0, \forall n > No, (max(e_n, e_{n+p}) - min(e_n, e_{n+p}) \leq \epsilon)$)
$\Rightarrow$
($\exists l \in \Pi$, $\forall \epsilon \in \Pi \backslash \{0\}, \exists No \in \mathbb{N}, \forall n > No, (max(e_n, l) - min(e_n, l) \leq \epsilon)$)

se réécrit :
$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
($\forall \epsilon \in \Pi \backslash \{0\}, \exists No \in \mathbb{N}, \forall p > 0, \forall n > No, extension(x_n \ominus x_{n+p}) \leq \epsilon)$)
$\Rightarrow$
($\exists l \in \mathbb{R}$, $\forall \epsilon \in \Pi \backslash \{0\}, \exists No \in \mathbb{N}, \forall n > No, extension(l \ominus x_n)) \leq \epsilon$)

Lectures, sources et influences

- Programme des classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques pour les bases mathématiques.
- Cursus grande école/master
- Ressources en ligne (Axiomes des nombres réels -https ://perso.univ-rennes1.fr/stephane.leborgne/Axiomes.pdf; construction des nombres réels et équivalence à isomorphisme près : https ://www.lpsm.paris/pageperso/roux/enseignements/1213/capes/reels.pdf) ; Magazine (numéro 59, "La droite", Tangente)
- Emmanuel Kant - Critique de la raison pure (1781), *pour l'espace décrit comme forme de notre intuition externe. L'espace de Kant est un contenant indépendant du contenu qui est a priori. Malgré ce point commun avec notre espace, il y a plusieurs distinctions. Dans le cas de Kant, la structure logique du contenant est la géométrie euclidienne tandis que nous nous sommes intéressés à un contenant structuré par les nombres réels décomposés. De plus, l'espace de Kant est la forme a priori du contenu spatial considéré par un sujet. Dans notre cas, l'espace n'est pas une forme a priori mais une totalité a priori. La totalité joue le rôle de forme a priori pour un objet se définissant comme une partie de cette totalité mais, à la différence d'une forme a priori, la totalité est déjà "pleine" sans le contenu .*
- Henri Poincaré, Des fondements de la géométrie (1854). *Dans "des fondements de la géométrie", Poincaré algébrise l'espace (comme un groupe continu) à travers un unique médium : des déplacements. Les déplacements s'ajoutent, se compensent et algébrisent l'espace suivant une logique analogue à celle du langage formel. Plus précisément, les déplacements sont des suites de perceptions externes indexées par des sensations musculaires. Deux suites de perceptions externes indexées par des sensations musculaires sont alors jugées égales si les suites de sensations musculaires sont égales ou si les perceptions externes initiales et finales sont égales. Ainsi, "Avancer" + "Reculer" = "Rester immobile" car les perceptions externes initiales et finales sont égales. De plus, "Avancer devant un objet rouge" = "Avancer devant un objet vert" car les sensations musculaires qui corrigent les déplacements sont égales dans les deux cas. Le langage de Poincaré est virtualisé par le langage de l'espace euclidien avec les correspondances suivantes : - Perception externe ⇔ point ; - sensation musculaire ⇔ extension et signe ; - suite de perceptions/sensations musculaires ⇔ suite de points/(extensions et signes). Les déplacements de Poincaré forment l'interprétation empirique du langage de l'espace euclidien.*
- Bosse des maths (La), Quinze ans après, Stanislas Dehaene (2010). *Une étude sur le support de la connaissance mathématique qui met en lumière des limites de notre document et aussi l'enjeu de notre démarche. Premièrement, notre document est sans doute limité car des connaissances cognitives peuvent probablement s'injecter dans notre modèle et en corriger plusieurs points. Par exemple 3 n'est sans doute pas cognitivement homogène à 1000 tandis qu'il est présenté comme tel dans le contexte de notre espace. A noter que nous pouvons nous échapper à quelques critiques de modélisation avec la perspective suivante : - il nous est possible de traiter des connaissances corrigeantes comme des connaissances de notre manière de connaître l'espace que nous venons de définir (qui lui resterait inchangé et contenu en lui même). Deuxièmement, notre travail pourrait se révéler précieux car les schémas mentaux des nombres (comme celui de la température, du dénombrement ou de l'étendue) semblent constituer une partie non négligeable de notre connaissance mathématique. Les schémas aideraient à construire, toujours dans un intuitif multi-modal, des nombres qui transcendent les nombres "sans signe", logarithmiques et "animaux" qui forment la base innée du concept de nombre. Par exemple, le schéma de dénombrement donne une intuition des nombres entiers qui n'est pas donnée par notre sens inné des nombres ; de même, la température donnerait une intuition d'un nombre négatif pas contenue dans un schéma de dénombrement ; ...). Or, nous venons d'établir un schéma mental des nombres réels algébriquement conforme à ces derniers (plongé dans l'espace euclidien).*
- Christopher Langan - Cognitive-Theoretic Model of the Universe. *The CTMU uniformization of objective and subjective reality under a category that contains both (namely "language") helped me think about "spatial representation". Are we violating the principle "Mind = Reality" by describing a self-contained space ? Our space is self-contained only insofar as it is a model of an a priori totality. Such a model is however understood by a mind.*