Représentation des fonctions réelles d'une variable réelle

www.Idenomaths.fr

IdenoMaths

29 septembre 2018

Table des matières

1 Introduction sur les fonctions réelles d'une variable réelle **1**

2 Principe général de représentation des fonctions **2**

3 Représentation des fonctions s'appuyant sur $\mathbb{D}$ **3**
3.1 Quelques propriétés relatives à la relation d'ordre . . . 3
3.2 Quelques propriétés relatives aux signes . . . 4
3.3 Quelques propriétés relatives à la grille de valeurs . . . 4
3.4 Quelques propriétés relatives à la distance . . . 4
3.5 Sur la description ou définition des fonctions . . . 6

4 Représentation des fonctions s'appuyant sur ($\mathbb{R}$, $\oplus$,$\otimes$, $\ominus$, $|.|$) **6**
4.1 Quelques propriétés relatives à $\oplus$ . . . 6
4.2 Quelques propriétés relatives à $\otimes$ . . . 6

5 Représentation des fonctions s'appuyant sur le plan **6**
5.1 Quelques propriétés relatives à l'aspect . . . 6
5.2 Quelques propriétés relatives aux relations entre fonctions . . . 7

6 Représentations non usuelles des fonctions **9**
6.1 Introduction . . . 9
6.2 Représentation du plan achevé . . . 10

7 Annexe **13**
7.1 Représentation non injective du plan achevé . . . 13
7.2 Comparaison asymptotique . . . 13

Ce document décrit un "schéma mental" spatial des fonctions réelles d'une variable réelle compatible avec leur définition formelle.

1 Introduction sur les fonctions réelles d'une variable réelle

Une fonction réelle d'une variable réelle est un sous-ensemble du produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vérifiant une certaine condition d'unicité. Plus précisément, soit un sous-ensemble $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, G est une fonction réelle d'une variable réelle si et seulement si :

$$\forall((x, y), (x', y')) \in G^2, (x = x' \Rightarrow y = y')$$

(Littéralement : Pour tout (x,y) et (x',y') deux couples de nombres réels appartenant à l'ensemble G, si x est égal à x', alors y est égal à y')

(Autrement dit, G est une fonction réelle d'une variable réelle si G est un ensemble de couples de nombres réels qui vérifie que tout nombre réel dans la première composante est associé à au plus un nombre réel dans la deuxième composante.)

Puisqu'une fonction réelle est un sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, une fonction réelle lie des nombres réels à des nombres réels. Une fonction réelle n'est pas une relation symétrique de $\mathbb{R}$ avec lui-même. Quelle est la différence entre les éléments dans la première composante (les 'x's) et les éléments dans la deuxième composante (les 'y's) ? Principalement, pour tout x dans une fonction, il existe toujours un seul y associé au x. Dès lors, y peut s'écrire suivant la fonction f et l'élément x. Par suite, un y peut être appelé l'image d'un x par f et peut s'écrire f(x). Le champ lexical le plus répandu pour capturer la relation des 'x's aux 'y's est celui d'une transformation. x appartient à un ensemble de départ et y à un ensemble d'arrivée. f est alors associée à une transformation déterministe qui dépendrait d'un paramètre de départ x. Dans cette analogie, le paramètre x produirait différentes valeurs d'arrivée 'y's selon, et le déterminisme supposé de la transformation garantie qu'un seul y est associé au x et donc que le lien entre x et y est conforme à un couple (x,y) d'une fonction. A noter que dans ce contexte, la fonction f n'est pas l'objet qui transforme x en y, mais c'est l'unité de connaissance qui joint x et y **malgré** la transformation qui les sépare. En tant que forme très générale de connaissance, une fonction réelle d'une variable réelle modélise d'autres relations de nombres réels entre eux. En particulier, une fonction est appropriée pour décrire la subordination de grandeurs physiques au temps et à l'espace dans le contexte de la physique classique. Dans ce contexte, les 'x's se comprennent comme des supports, et les 'y's comme des valeurs se distribuant sur les supports.

Pour toute fonction f, on définit l'ensemble de définition D_f et l'image Im(f). Ce sont respectivement tous les 'x's qui admettent un y et tous les 'y's qui admettent un x. D_f et Im(f) ne sont pas des objets détachés de f qui parcourent tous les 'x's et les 'y's pour se constituer. Une fonction f se définit sur des ensembles de nombres réels ainsi :

$$\forall X \in \mathscr{P}(D_f), f(\cup_{x \in X}\{x\}) = \cup_{x \in X}\{f(x)\}$$

(Pour toute fonction réelle f, l'image d'un ensemble X est un ensemble égal à l'union des images des éléments de X.)

Puisque f est un morphisme sur les ensembles selon l'union $\cup$, D_f et Im(f) sont bien attachés à f. On a en particulier f(D_f) = Im(f)

2 Principe général de représentation des fonctions

Comment représenter un nombre réel dans l'espace euclidien ? En se donnant un repère (une origine, une extension unité, une direction et une orientation), chaque nombre est associé à un point le long d'une droite. La droite la plus usuelle $\mathbb{D}$ est un peu comme une règle graduée dont les graduations se prolongent dans l'infiniment grand et infiniment petit. Plus précisément, la droite $\mathbb{D}$ projette les nombres réels sur des développements dans certaines bases en préservant leur relation d'ordre et leur distance. Comme il a été présenté dans "Formaliser la droite des nombres réels", la droite usuelle est contenue dans une droite algébriquement conforme à un corps archimédien totalement ordonné et complet ($\mathbb{R}$,$\oplus$,$\otimes$, $\leqslant$,|.|). Dans ce contexte, le nombre réel se conçoit comme une transformation d'unité. Il est toujours muni d'un point qui le sépare des autres nombres/points avec des (extensions, directions,orientations). En outre, la droite des nombres réel se pose dans un espace à 3 dimensions qui permet de construire différentes droites identiques suivant n'importe laquelle de ses directions. L'espace est dit "à 3 dimensions" car il est supposé que 3 droites "indépendantes linéairement" sont nécessaires et suffisent à repérer tout point de l'espace. Tout point se décrit de manière unique par 3 coordonnées qui se lisent sur les axes d'un repères . En particulier, en se donnant un repère orthogonale, la relation d'un point à ses coordonnées est intuitive car ses coordonnées sont obtenues en construisant entre l'origine O et le point considéré un "cube" s'appuyant sur les axes du repère. En se donnant de plus un repère orthonormé, tous les axes ont un impact identique sur la distance 3-dimensionnelle qui se définit entre tous points.

Puisque l'espace euclidien lie trois droites des nombres réels entre elles, il représente des éléments de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En particulier, en se donnant seulement un repère constitué de deux droites, il représente des éléments de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Représente-t-il des sous ensembles de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$? Des sous ensembles de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se définissent en posant des conditions restrictives sur le plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Quelle est la condition restrictive qui correspond à une fonction réelle ?

Une fonction réelle n'est pas une relation symétrique de $\mathbb{R}$ à lui-même. Dès lors, nous devons distinguer deux droites des nombres réels (correspondant aux 'x's et 'y's respectivement). Mettons les 'x's (ou abscisses) sur un axe horizontal orienté avec les positifs à droite ; mettons les 'y's (ou ordonnées) sur un axe vertical

orientée avec les positifs en haut. Dans le contexte d'une fonction réelle, pour toute abscisse x, il peut exister au plus une ordonnée y qui correspond à x. Dès lors, une fonction réelle correspond à un filtre d'exclusion qui autorise la sélection d'au plus un point par abscisse x. Le filtre d'exclusion recouvre une droite verticale passant par l'abscisse x. La règle du filtre est qu'un seul point ne peut être sélectionné en son sein. Le fait qu'un tel filtre vertical se distribue dans le plan (i.e. sur toutes les abscisses du plan) définit une fonction réelle en général.

3 Représentation des fonctions s'appuyant sur $\mathbb{D}$

Une représentation usuelle d'une fonction est une représentation qui s'appuie sur un repère orthonormé avec une origine O, un axe "horizontal" orienté avec les positifs à droite et un axe "vertical" orienté avec les positifs en haut (correspondant respectivement à l'axe des abscisses et des ordonnées). La représentation des fonctions s'appuyant sur $\mathbb{D}$ est caractérisée par le fait que les axes sont constitués de droites de nombres réels usuelles $\mathbb{D}$.

Résumé sur la droite des nombres réels usuelle La droite des nombres réels usuelle, conçue comme une figure rectiligne graduable, exprime l'existence d'un objet $\mathbb{D}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{D}, x \in \mathbb{D}$$

($\mathbb{D}$ est un ensemble)

$$\exists d, \forall x, y \in \mathbb{D}^2, d(x,y) \in \{extensions\} \simeq \mathbb{D}^+$$

($\mathbb{D}$ admet une distance)

$$\exists \leq, \forall x, y \in \mathbb{R}^2, x \leq y \ ou \ y \leq x$$

($\mathbb{D}$ est "ordonné")

$$\forall x \in \mathbb{D}, \exists s \in \{0,1\}, \exists a_0 \in \{0,1,2,...,1000,...\}, \exists b \in \mathbb{N}, b > 1, \exists (a_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \{0,1,...,b-1\}^{\mathbb{N}},$$
$$x = (-1)^s (a_0 + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ...) = (-1)^s \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i}{b^i}$$

(Les éléments de $\mathbb{D}$ admettent des développements dans des bases arbitraires)

les propriétés sont en outre simultanées et *compatibles* les unes avec les autres. [1]

Les axes sont donc regardés en tant qu'ils expriment la relation d'ordre des nombres réels et leur distance. De plus, les points sont associés à des développements dans une certaine base tels qu'il viennent d'être décrits. En particulier, les développements dans une certaine base placent les nombres au sein d'une grille de valeurs possibles et leur attribuent des signes.

3.1 Quelques propriétés relatives à la relation d'ordre

La relation d'ordre définit des intervalles sur les axes. Les intervalles I sont des ensembles délimités par deux nombres réels a=inf(I) et b=sup(I) - et qui contiennent tous les nombres entre a et b (ou a est plus petit que b) . a et b peuvent être inclus ou non et cela donne : - des intervalles ouverts (a et b non inclus) ; - fermés (a et b inclus) ; - ni ouverts ni fermés (cas restants). Les intervalles ou encore des unions d'intervalles $\cup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ permettent de définir de nombreux cas de fonctions.

1. Nous cachons beaucoup de choses derrière le terme "compatible". La compatibilité fait que $\leq$ n'est pas seulement une relation binaire totale mais bien une "relation d'ordre" et que d est bien une "distance" et non pas simplement une application de $\mathbb{D}$ dans ses positifs. Mais tout cela ne serait vrai que par compatibilité avec un développement dans une certaine base. Tout cela ne serait par suite vrai que dans le contexte d'un développement dans une certaine base. Voir "formaliser la droite des nombres réels" pour plus de détail.

D'abord le filtre vertical qui impose la sélection d'exactement un point sur une abscisse donnée, ou *filtre de définition*, indique que l'abscisse appartient au domaine de définition d'une fonction réelle. Distribuer ce filtre sur des intervalles permet de définir des sous ensembles sur lesquels une fonction est définie. Dans certains cas, le domaine de définition d'une fonction (l'ensemble des abscisses sur lequel le filtre de définition se distribue) se décrit bien avec des intervalles. Similairement, le filtre horizontal qui impose la sélection d'au moins un point sur une ordonnée donnée traduit l'appartenance d'une ordonnée y à l'image d'une fonction f. Dans certains cas, l'image d'une fonction f (l'ensemble des ordonnées sur lequel le filtre de sélection horizontale se distribue) se décrit bien avec des intervalles.

Ensuite, une fonction f peut conserver une relation d'ordre entre des abscisses et les ordonnées correspondantes. La conservation de la relation d'ordre se distribue sur des abscisses. La fonction est dite monotone sur les abscisses concernées (strictement ou non strictement monotone suivant que la relation d'ordre est stricte ou large ; croissante/décroissante suivant que la relation d'ordre est conservée ou inversée lorsqu'on passe des abscisses aux ordonnées). Si une fonction est strictement croissante sur un ensemble d'abscisses par exemple, cela signifie qu'un point à gauche est toujours plus bas qu'un point à droite sur ces abscisses.

3.2 Quelques propriétés relatives aux signes

Les signes lient les nombres x et -x pour tout x car ils sont la seule composante qui les différencie. En effet, les nombres x et -x ont la même extension mais des orientations/signes différents. Si pour tout couple d'abscisses de la forme x et -x, les ordonnées correspondantes sont de la forme y et -y, alors la fonction est dite impaire (symétrie centrale). Si pour tout couple d'abscisse de la forme x et -x, il existe une seule ordonnée correspondante y, alors la fonction est paire (symétrie axiale par rapport à (Oy)).

3.3 Quelques propriétés relatives à la grille de valeurs

Les grilles de valeurs identifient des abscisses et ordonnées particulières. L'intervalle [a,b] peut ainsi être déclaré être exactement [0,1] ou encore [0, π] par exemple. En spécifiant à la fois une abscisse et une ordonnée, une fonction peut être définie ponctuellement . Si f passe par (0,1) par exemple, cela signifie f(0)=1. Dans une certaine mesure, la grille de valeur peut être employée pour définir certaines fonctions. Par exemple, la fonction affine f passant par (0,b) et (1, b + a) est telle que f(x) = ax + b pour tout x. Mais il ne s'agit dans ce cas que d'identifier la fonction parmi une famille de fonctions grâce à des valeurs particulières.

3.4 Quelques propriétés relatives à la distance

Une distance permet de caractériser des couples de nombres par des grandeurs continues (plutôt que par des booléens comme le fait la relation d'ordre). En particulier, la distance définit des intervalles autour de points et par suite des voisinages [2]. Par exemple, une boule fermée centrée en a de rayon ϵ est l'ensemble des points dont la distance à a est inférieure ou égale à ϵ. B(a,ϵ) = { M $\in \mathbb{R}$, d(a,M) $\leq \epsilon$ } = [a-$\epsilon, a+\epsilon$]. Une boule ouverte serait telle que : B(a,ϵ) = { M $\in \mathbb{R}$, d(a,M) $< \epsilon$ } =]a-$\epsilon, a+\epsilon$[(les extrémités sont exclues).

3.4.1 Continuité en x0 $\in$ I non trivial $\subset$ Df

Continuité en x0 à gauche, à droite, les deux (par défaut) La continuité en une abscisse x0 caractérise un comportement d'une fonction pour des abscisses dans "l'infini entourant x0". Naturellement, dès lors, pour définir la continuité en x0, il faut se donner x0 dans un intervalle sur lequel la fonction est définie. Soit x0 quelconque dans I non trivial $\subset$ Df [3] , f est continue (à gauche, à droite, les deux (par défaut)) en x0 si la limite à gauche, à droite ou à droite et à gauche de x0 est égale à f(x0) (respectivement).

Illustration

Prenons d'abord le cas de la continuité à droite et à gauche (cas par défaut).

2. Un voisinage de x0 est un ensemble qui contient un ouvert qui contient x0. Un voisinage contient ainsi toujours l'infini qui entoure un x0.

3. I non trivial signifie non réduit à {x0}

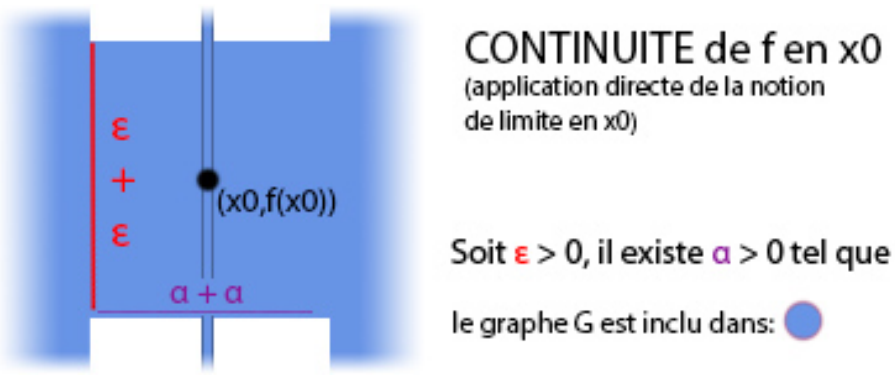


FIGURE 1 – Continuité en x0 illustrée en appliquant directement la notion de limite

Le filtre bleu est un filtre d'inclusion qui impose que la fonction G appartienne au filtre (ou encore, que la fonction G soit exclue de la partie blanche). La notion de limite est basée sur la famille de filtres indexée par ϵ illustrée. La notion de limite en x0 caractérise le comportement de la fonction dans l'infini autour de l'abscisse x0. Dès lors, la continuité n'affirme rien en x0 et rien non plus à une abscisse autour de x0. En effet, α est arbitrairement petit pour tout ϵ et donc n'importe quelle abscisse x1 distincte de x0 est dans la partie libre du graphe à l'extérieur de]x0-α, x0 + α [\{ x0 } [4] - qui est la seule tranche d'abscisses impliquée dans la propriété. Dans le cas de la continuité, il est imposé que la limite en x0 soit L = f(x0) et donc la fonction est par hypothèse définie et localisée en l'abscisse x0 en laquelle la limite est énoncée. Le filtre pour la continuité est donc plus simplement :

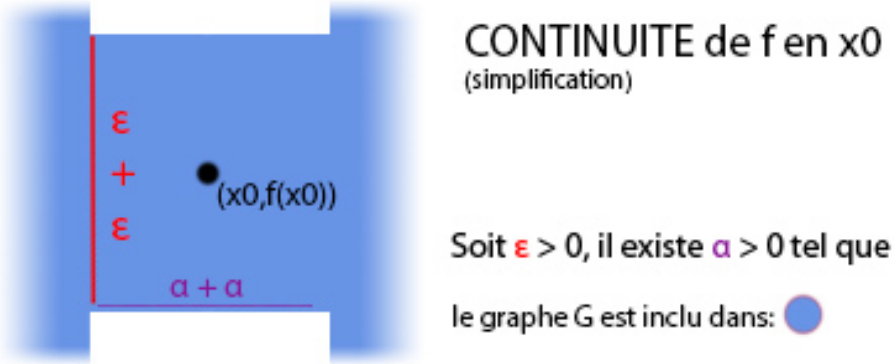


FIGURE 2 – Continuité illustrée en simplifiant

Un cas de continuité à gauche donnerait :

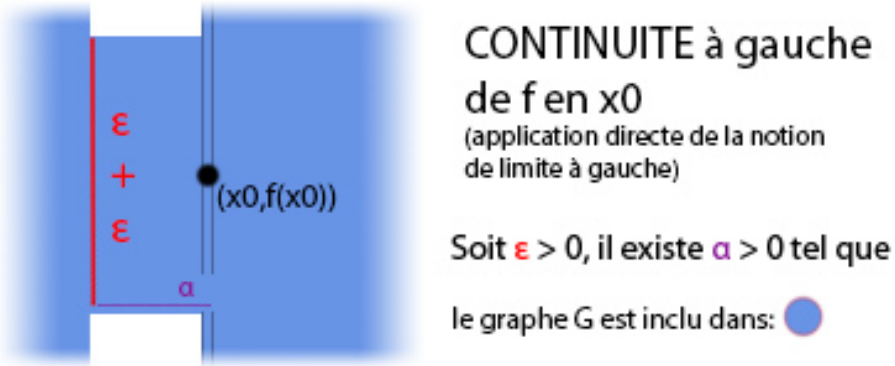


FIGURE 3 – Continuité à gauche de x0 illustrée en appliquant directement la notion de limite

4. *(l'intervalle délimité par x0-α et x0+α ; privé de x0)*

Remarque sur les illustrations Les illustrations ne représentent pas universellement la notion continuité qui est conçue sur des espaces beaucoup plus généraux, mais elles résument bien la propriété comme l'absence d'un saut. En effet, seul un saut soudain d'ordonnée commençant dans l'infini à côté d'une abscisse x0 peut contredire la continuité en x0.

3.5 Sur la description ou définition des fonctions

Avec de telles propriétés graphiques, il est possible : - de manipuler les propriétés entres elles en les combinant ; - de décrire une fonction particulière en distribuant les propriétés graphiques d'une façon vraie pour cette fonction particulière.
A noter qu'une fonction particulière peut déjà être définie graphiquement avec les propriétés abordées en distribuant des valeurs constantes sur des intervalles d'abscisses (la fonction est alors définie sur ses intervalles et ses ordonnées sont les valeurs constantes distribuées).

4 Représentation des fonctions s'appuyant sur ($\mathbb{R}$, $\oplus$,$\otimes$, $\ominus$, $|.|$)

Certaines propriétés des fonctions réelles d'une variable réelle s'appuient sur des opérations algébriques relatives à l'addition ou à la multiplication. Pour représenter de telles propriétés, les axes doivent être munis de la structure de ($\mathbb{R}$, $\oplus$,$\otimes$, $\ominus$, $|.|$).

4.1 Quelques propriétés relatives à $\oplus$

La T périodicité d'une fonction affirme que f(x + T) = f(x) pour tout x. Autrement dit, l'ajout réitéré de T à une abscisse ne change pas l'ordonnée correspondante. La période T est quelconque et est donc relative à une addition en général.

4.2 Quelques propriétés relatives à $\otimes$

Une fonction affine se caractérise par le fait que pour tout point de la fonction G, tous les autres sont obtenus en translatant l'ordonnée par le coefficient directeur a multiplié par la translation d'abscisse - pour toutes les translations d'abscisses possibles.

FIGURE 4 – Une fonction affine (en rouge) de coefficient directeur a.
Les différences d'abscisses sont transformées en différences d'ordonnées avec le principe multiplicateur $\otimes$. Ici, a est inférieur à 1 et il est a par rapport à 1 car il est $1 \times a$.

5 Représentation des fonctions s'appuyant sur le plan

Certaines propriétés des fonctions réelles d'une variable réelle ne dérivent pas directement des propriétés des axes, mais s'appuient sur multiples configurations se produisant dans le plan.

5.1 Quelques propriétés relatives à l'aspect

Continuité sur I Si une fonction G est continue sur I, alors pour toute abscisse x0 de I, G vérifie la propriété de continuité en x0. Globalement, le graphe peut être interprété comme un trajet "continu" (que peut suivre un objet ponctuel se déplaçant des abscisses les plus négatives aux plus positives sans "saut" brusque d'ordonnée). L'aspect continu est un concept qui regroupe de multiples propriétés dont le fait qu'aucun saut d'ordonnée n'est réalisé dans aucun infini entourant une abscisse - dont le théorème des valeurs intermédiaires - dont le fait qu'une borne supérieure est atteinte sur un intervalle fermé, etc...

5.2 Quelques propriétés relatives aux relations entre fonctions

Fonction réciproque Soit G le graphe d'une fonction admettant une fonction réciproque ayant un graphe G^{-1}. Par définition d'une fonction réciproque, $(x, y) \in G \Rightarrow (y, x) \in G^{-1}$. Si un point P1=(x,y) est sélectionné par le graphe G, un point P2=(y, x) est sélectionné par le graphe G^{-1} . La position de P2 se déduit de P1 en permutant les abscisses et ordonnées. La droite y = x (ou première bissectrice) est alors un axe de symétrie :

$$\forall P_1 \in G, \exists P_2 \in G^{-1}, P_2 = SymétriqueParRapportALaPremiereBissectrice(P_1)$$

(*Pour tout point P_1 dans la fonction G, le point symétrique P_2 par rapport à la première bissectrice est dans la fonction réciproque G^{-1})*

Comparaison des fonctions Une fonction G_1 est (strictement) supérieure à G_2 sur un intervalle I si pour toute abscisse x de l'intervalle, l'ordonnée du point de G_1 est (strictement) supérieure à l'ordonnée du point de G_2.

Dérivées

5.2.1 Dérivabilité en x0 $\in I$

Dérivabilité en un point $x0 \in I$ non trivial La dérivabilité caractérise le comportement d'une fonction pour les abscisses dans l'infini entourant une abscisse x0. Prenons x_0 dans un intervalle non trivial sur lequel la fonction est définie, i.e. $x_0 \in I \subset Df$. Une fonction f est dérivable en x0 si il existe un coefficient directeur l tel que Soit $\epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \backslash \{x0\}, ((1)|x - x_0| < \alpha) \Rightarrow |\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - l| < \epsilon$. Si l existe, l est notée $f'(x_0)$ et correspond à la dérive de f en x_0.

La dérivabilité à droite est le cas où seulement : (1) $0 < x - x_0 < \alpha$, la dérivabilité à gauche le cas où seulement : (1) $-\alpha < x - x_0 < 0$

La dérivabilité affirme que le taux d'accroissement $. \rightarrow \frac{f(.)-f(x_0)}{.-x_0}$ atteint une limite finie en x0.

Il est possible également de considérer la propriété directement comme un encadrement de la fonction : Soit $\epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \backslash \{x0\}, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x0) + (f'(x0) - \epsilon)(x - x0) < f(x) < f(x0) + (f'(x0) + \epsilon)(x - x0))$

La propriété peut alors être interprêtée comme le fait que G est encadrée par des droites au coefficient directeur arbitrairement proche de f'(x0) sur un voisinage de x0 .

Illustration

Nous n'illustrons que le cas où la dérivabilité est à gauche et à droite. Le dégradé suggère que la zone bleu s'étend indéfiniment.

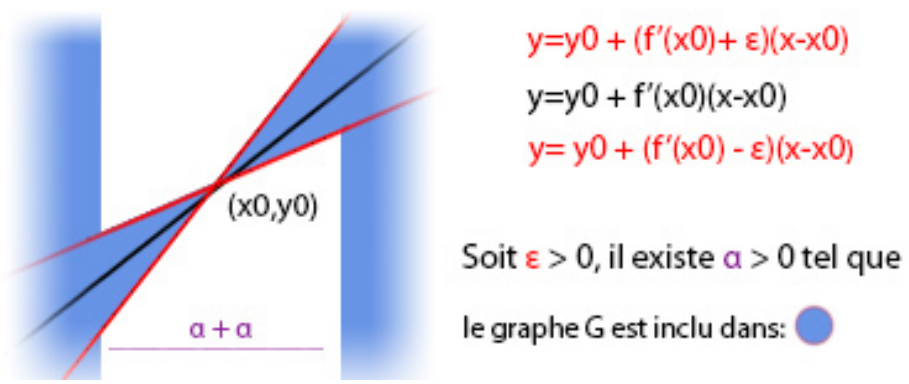


FIGURE 5 – Si une fonction est dérivable en x0, son graphe est encadré par des droites au coefficient directeur arbitrairement proche de f'(x0) autour de x0. Le cas illustré est le cas où il y a dérivabilité à gauche et à droite. La droite noire a un coefficient directeur égal à f'(x0)

Si la dérivée existe, elle est associée à une droite tangente de coefficient directeur f'(x0) (la droite illustrée par un trait noir dans la figure ci-dessus). Le filtre bleu est un filtre d'inclusion qui impose que la fonction G appartienne au filtre (ou encore, que la fonction G soit exclue de la partie blanche). La notion de dérivabilité est basée sur la famille de filtres indexée par ϵ illustrée. La notion de dérivabilité en x0 caractérise le comportement de la fonction dans l'infini autour de l'abscisse x0. Dès lors, la dérivabilité n'affirme rien en x0 et rien non plus en une abscisse autour de x0. En effet, α est arbitrairement petit pour tout ϵ et donc n'importe quelle abscisse x1 distincte de x0 est dans la partie libre du graphe à l'extérieur de]x0-α, x0 + α [\{ x0 }[5] - qui est la seule tranche d'abscisses impliquée dans la propriété. Dans le cas de la dérivabilité, il est imposé que la fonction G soit définie en x0 et que les fonctions qui encadrent G autour de x0 passent par (x0,f(x0)), donc le filtre d'exclusion s'étend naturellement en x0 comme il a été fait.

Remarque sur les illustrations Les illustrations sont loin d'illustrer universellement la notion de dérivabilité qui est conçue sur des espaces beaucoup plus généraux, mais elles résument bien la propriété comme la possibilité d'approximation affine dans l'infini entourant le point.

5.2.2 Dérivabilité sur I

Dérivabilité sur I Dérivabilité en chaque point (x,f(x)) pour x dans I. Puisque la dérivée est la même à droite et à gauche, la fonction G n'admet pas de "point anguleux" (point en lequel la fonction admet une tangente différente à droite et à gauche[6]).

5.2.3 Concavité sur I

Cf courbe concave.

5. *(l'intervalle délimité par x0-α et x0+α ; privé de x0)*
6. Exemple de point anguleux : $x \to |x|$ en 0

6 Représentations non usuelles des fonctions

6.1 Introduction

Introduction des fonctions de représentation Nous avons représenté des sous ensembles de $\mathbb{R}^2$ en sélectionnant des points dans un repère s'appuyant sur $\mathbb{D}$ ou encore ($\mathbb{R}$,$\oplus$,$\otimes$, $\oslash$, $|.|$). Par suite, nous avons identifié des configurations de points correspondant à des propriétés de fonctions. Nous avons pu noter que certaines propriétés (associées à des limites) s'appliquaient à des points dont les abscisses sont "dans l'infini autour d'autres abscisses", car s'appuyaient sur des familles arbitrairement fines d'ouverts. Des propriétés similaires s'appliquent sur des familles arbitrairement fines d'ouverts autour de $-\infty$ ou $+\infty$ (où ∞ signifie l'infini). Mais tandis que le langage empirique présente les premières familles comme "arbitrairement fines", celles autour de $-\infty$ ou $+\infty$ sont présentées comme "arbitrairement toujours plus fines mais infiniment larges". Puisque toute limite est soit une limite en 0, soit une limite en $+\infty$ (pour quiconque à fait des mathématiques), et que la topologie des ouverts sur lesquels la propriété s'appuie est similaire dans les deux cas, alors une inhomogénéité sur la représentation des ouverts (surtout une inhomogénéité... immense !) est une inefficacité conceptuelle. Pour de nombreux cas de situations mathématiques, l'infiniment grand ($-\infty$, $+\infty$) et ses voisinages devraient être compris et traités de la même façon que les voisinages à droite ou à gauche d'autres points. Pour obtenir une homogénéité représentative des ouverts, nous allons modifier l'endroit où nous plaçons les points. Dès lors, donnons nous u_1 et u_2 deux fonctions à valeurs réelles telles que $Du_1 = Du_2 = \mathbb{R}^2$ [7], qui sont telles que tout point de $\mathbb{R}^2$ a désormais une abscisse donnée par u_1 et une ordonnée donnée par u_2. Pour désigner une telle représentation, nous pouvons écrire : (u_1, u_2).

Cas d'un "changement d'axes" Un cas particulier de représentation est celui où u_1 ne dépend que de la première composante et u_2 de la deuxième composante. Dans ce cas, la représentation se décrit bien comme un "changement d'axes" général puisque seules les "graduations sur les axes" Ox Oy sont modifiées par rapport à la représentation usuelle. En particulier la représentation des fonctions en général est identique (en effet, une fonction consiste en un filtre d'exclusion vertical se distribuant sur les abscisses dans le langage usuel - et cela est conservé dans le cas d'un changement d'axes)

Cas d'un "changement d'échelle" Un changement d'échelle se produit lorsque u_1 et u_2 sont de plus très régulières et ne font que transformer les abscisses et les ordonnées le long des deux axes comme si les axes étaient dilatés ou compressés par endroit. Pour simplifier, nous pouvons considérer qu'une représentation est un changement d'échelle par rapport à la représentation usuelle si u_1 et u_2 sont des $C^{+\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ difféomorphismes [8] (strictement) croissants. De telles hypothèses permettent de conserver beaucoup d'éléments du langage usuel des fonctions, en particulier la topologie (ouverts, fermés, limite, continuité), la dérivabilité [9] et la relation d'ordre.

Cas d'un "changement d'échelle" impair et simple Pour conserver encore quelques éléments du langage usuel des fonctions, nous pouvons choisir des fonctions de représentation u_1 et u_2 impaires (cela conserve l'aspect de la parité et imparité). De plus, si $u_1 = u_2$, la représentation sera dit simple et ne sera plus caractérisée que par une fonction de représentation u=u_1= u_2.

Plan achevé Représenter le plan achevé signifie représenter $\overline{\mathbb{R}}^2 = (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})^2$. Représenter le plan achevé $\overline{\mathbb{R}}^2$ à l'aide d'axes s'appuyant sur ($\mathbb{R}$,$\oplus$,$\otimes$, $\oslash$, $|.|$) a un effet sur l'interprétation subjective des nombres réels . En effet, dans le cadre d'un changement d'échelle, la représentation des ouverts devient uniforme, c'est-à-dire que les ouverts autour de $+\infty$ (resp. de $-\infty$) se donnent de manière équivalentes aux ouverts à droite (resp. à gauche) de tout nombre réel (par exemple 0). Pour qu'un changement d'échelle représente le plan achevé, il suffit que u_1 et u_2 soient bornées (i.e. leur image est encadrée par deux nombres réels). Note : à propos des fermés autour d'un nombre réel ou de $+\infty$, il y a une inhomogénéité dans le sens où [a,$+\infty$[est fermé tandis que [a,b[ne l'est pas, mais de tels fermés interviennent dans peu de propriétés - et il y a d'autres exceptions naturelles qui s'appliquent du fait que $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas inclus dans $\mathbb{R}$.

7. (i.e. u_1 et u_2 sont définies sur les couples de nombres réels)

8. Un difféomorphisme est une bijection différentiable dont la réciproque est différentiable. Par suite, un $C^{+\infty}$ difféomorphisme est une bijection infiniment différentiable dont la réciproque est infiniment différentiable.

9. La dérivabilité est toujours représentée de la même façon mais avec une pente de tangente qui ne correspond plus à la valeur de la dérivée toutefois.

6.2 Représentation du plan achevé

Caractérisation de (arctan,arctan) Arctan est un ($C^{+\infty}$) difféomorphisme, croissant donc (arctan, arctan) est changement d'échelle. L'image de arctan est bornée :$arctan(\mathbb{R}) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc le plan achevé est représentable par prolongement par continuité. En effet, il suffit de poser $arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ et $arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$. De plus, $u_1 = u_2$ donc (arctan,arctan) est simple.
Note : le prolongement par continuité en $+\infty$ est possible car la distance dont est munie le plan devient $d((x,y),(x',y')) = \lambda \times \sqrt{(u_1(x) - u_1(x'))^2 + (u_2(y) - u_2(y'))^2}$, avec λ un nombre réel strictement positif. Dès lors, les infiniment grands sont infiniment proches et ce qui diverge vers $-\infty$ ou $+\infty$ converge en $-\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$ dans le repère usuel.

Présentation qualitative Qualitativement, la représentation (arctan, arctan) change les différences perçues sur chaque axe : autour d'une abscisse x par un facteur $(1 + x^2)$ (autrement dit une différence d'abscisse autour de x sera perçu comme $(1 + x^2)$ fois plus petite que cette même différence autour de x = 0) et de même pour les ordonnées.

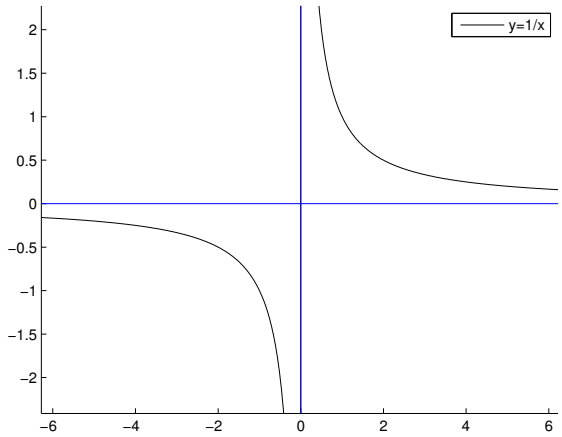


FIGURE 6 – La fonction . → 1/. représentée par (id,id)

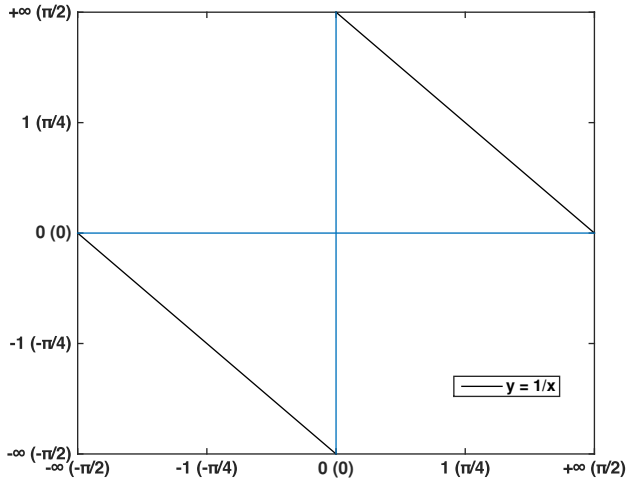


FIGURE 7 – La fonction . → 1/. représentée par (arctan, arctan) (en parenthèses les abscisses/ordonnées de la représentation usuelle)
[10]

10. Le graphe dans (arctan,arctan) s'écrit dans (id,id) :$(u, \frac{\pi}{2} - u)$ pour u positif, $(u, -u - \frac{\pi}{2})$ pour u négatif (cf. Arctan(x) + Arctan($\frac{1}{x}$) = signe(x)$\frac{\pi}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$).

En lisant simplement le tracé, nous apprenons que f : . $\to 1/.$ est affine sur $]-\infty, 0[et]0, +\infty[$, i.e. $\exists a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R}$ tels que $u_2(f(x)) = a \times u_1(x) + b$ (graphiquement, on peut déterminer a = -1, b = -/+$\frac{\pi}{2}$ (respectivement)). f est donc $C^{+\infty}$. f est strictement décroissante. f converge vers $(-\infty, 0), (0^-, -\infty), (0^+, +\infty), (+\infty, 0)$. f est impaire. f ne s'annule pas.

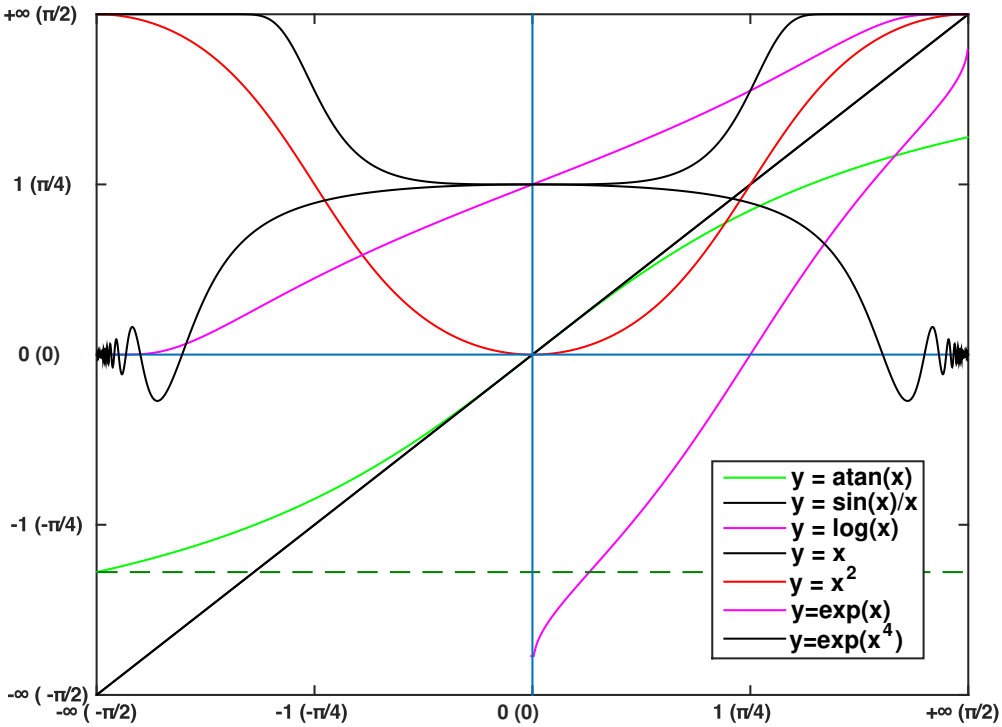


FIGURE 8 – Fonctions usuelles représentées par (arctan,arctan) (en parenthèses les abscisses/ordonnées de la représentation usuelle)

Dans (arctan,arctan), les fonctions réciproques (par exemple exp et ln) sont bien interprétées comme telles. Les parités/imparités, continuités, dérivabilités, les comparaisons des fonctions entre elles et comportements asymptotiques sont manifestes. Remarquons que, même si elles sont déformées, la périodicité et la concavité sont plutôt reconnues. En particulier, autour de (0,0) la représentation est approximable à (id,id) par développement limité donc il est possible d'obtenir l'aspect caractéristique de la concavité (dans l'infini entourant (0,0), mais plus autour également du fait de la régularité et faible variation d'arctan et des fonctions usuelles autour de (0,0)).

Remarque sur les conséquences de la représentation du plan achevé Le fait d'avoir un unique genre de représentant d'un ouvert n'est pas une efficacité conceptuelle que pour les propriétés locales (de type limite). En effet, l'infiniment grand empirique disparaît. Il emporte avec lui la notion de fenêtre du plan à laquelle est restreinte une représentation visuelle (la courbe infinie cachée dans l'infiniment grand non représentable). Mais cela signifie-t-il que l'infiniment grand empirique mérite d'être oublié ? En fait, l'infiniment grand exhibe bien l'infinité des situations pouvant s'y produire, aussi son équivalence à l'infiniment petit entourant un point "à changement d'échelle" près éclaire sans doute la relation de tous les points avec leur autour.

Remarque sur l'incertitude L'incertitude de l'information sur nos figures est à $\Delta y = +\infty$. Par exemple, dans (arctan, arctan), une fonction qui tend vers y = 10000 est indiscernable d'une fonction divergeant vers $+\infty$. Mais, toute représentation graphique admet de telles incertitudes et est fondée sur des conventions d'interprétation (dont le principe de base est l'absence de surprise/la perfection de l'information représentée/la prévalence de l'hypothèse la plus extrême).

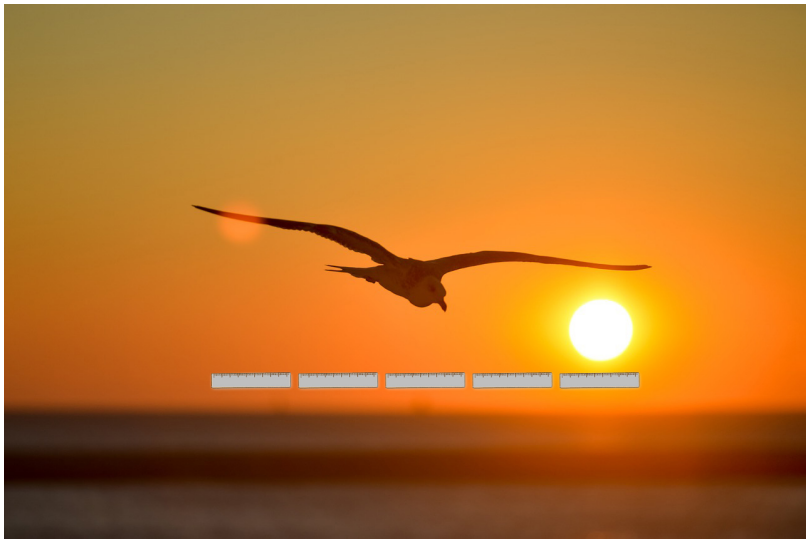


FIGURE 9 – Raisonner selon la distance usuelle dans une représentation qui la transforme est naturel. Ici, le soleil est immédiatement conçu plus grand que l'oiseau. De même, raisonner sur des fonctions usuelles selon la distance usuelle à partir d'un plan qui transforme les distances semble digérable - en particulier lorsque la majorité des propriétés des fonctions ont le même aspect.

Fonction usuelle-équivalente Soit une fonction f représentée par un changement d'échelle (u_1, u_2). La fonction qui se représente de manière identique (i.e. les points sélectionnés sont les mêmes) dans (id,id) est :

$$u_2 \circ f \circ u_1^{-1}$$

définie sur $u_1(Df) = \{u_1(x), x \in Df\}$

Courbe paramétrée usuelle-équivalente Le graphe G de la fonction f dans (u_1, u_2) s'identifie à la courbe paramétrée tracée dans (id,id) : $x \to (u_1(x), u_2(f(x))$ définie sur Df

Distance adaptée à la représentation La distance adaptée à la représentation est $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, d((x, y), (x', y')) = \lambda \times \sqrt{(u_1(x) - u_1(x'))^2 + (u_2(y) - u_2(y'))^2}$, avec λ un nombre réel strictement positif.

Element de longueur de la distance adaptée La distance adaptée à la représentation est caractérisée par l'élément de longueur $dl^2 = \lambda^2 \times (u_1'(x)^2 dx^2 + u_2'(y)^2 dy^2)$

Dérivabilité La dérivabilité dans (u_1, u_2) se traduit en une dérivabilité dans (id,id) de pente observée en x égale à :

$$(u_2 \circ f \circ u_1^{-1})'(x) = u_1^{-1\prime}(x) \times f'(u_1^{-1}(x)) \times u_2'(f(u_1^{-1}(x)))$$

Remarque 3 : La pente observée est également égale à

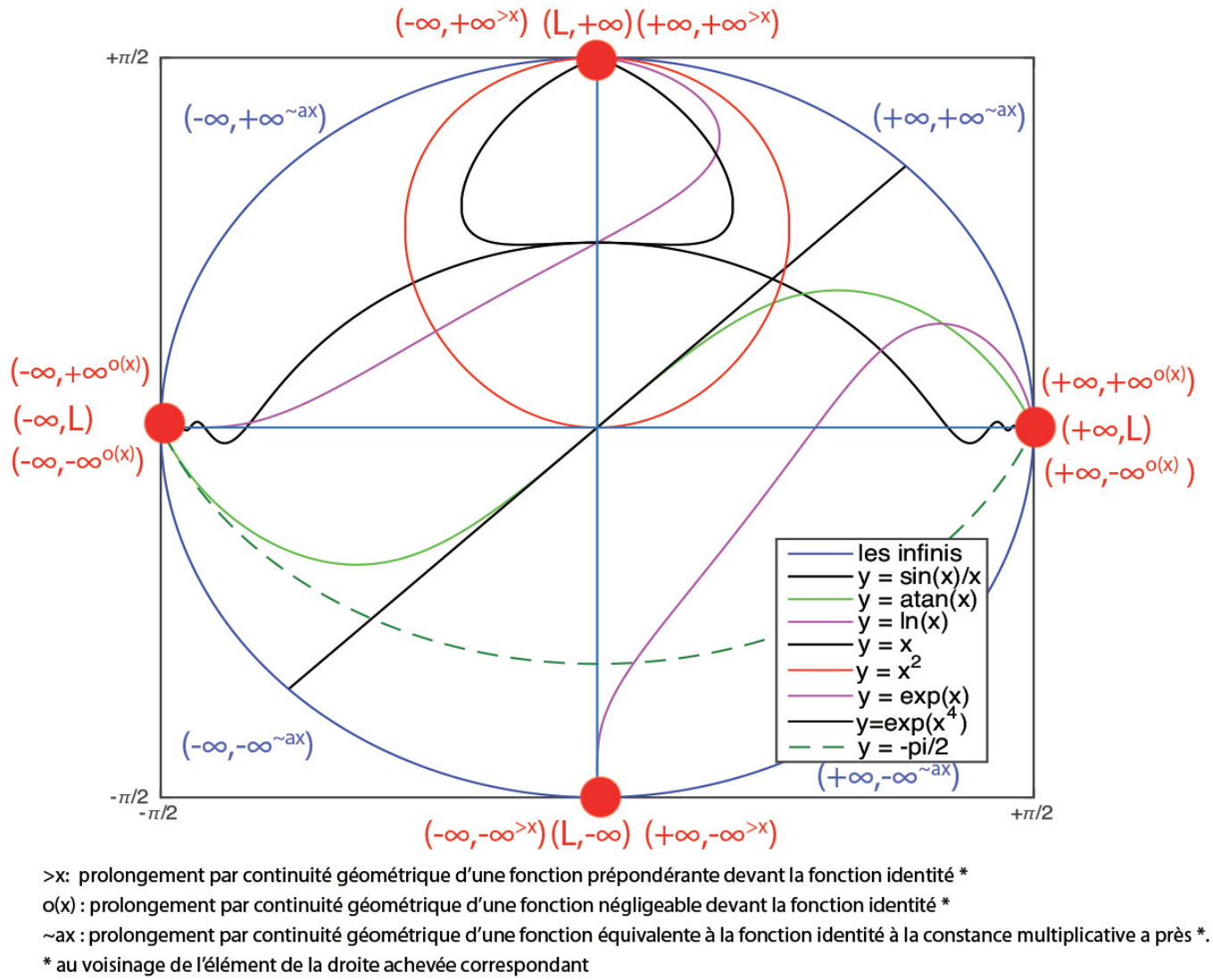
$$lim_{h \to 0} \frac{u_2(f(x+h)) - u_2(f(x))}{u_1(x+h) - u_1(x)}$$

(s'adapte à la dérivabilité à gauche et à droite avec h<0 et h>0 (respectivement))

7 Annexe

7.1 Représentation non injective du plan achevé

Des représentations du plan achevé peuvent être obtenues sans unicité des points vers lesquels divergent les fonctions ou vers lesquels elles convergent en $\pm\infty$. Par exemple, appliquons la transformation au plan : $(r, \theta) \to (arctan(r), \theta)$. La représentation de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est injective (tout point de $\mathbb{R}^2$ est associé à un unique point du plan). Cependant, en prolongeant par continuité, la représentation de $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ n'est pas injective. Dans la figure qui suit, L correspond à un élément quelconque de $\mathbb{R}$.



>x: prolongement par continuité géométrique d'une fonction prépondérante devant la fonction identité *

o(x) : prolongement par continuité géométrique d'une fonction négligeable devant la fonction identité *

~ax : prolongement par continuité géométrique d'une fonction équivalente à la fonction identité à la constance multiplicative a près *.

* au voisinage de l'élément de la droite achevée correspondant

FIGURE 10 – Représentation du plan achevé par $(r, \theta) \to (arctan(r), \theta)$ et méthode de prolongement par continuité

7.2 Comparaison asymptotique

Equivalence entre dérivabilité et comparaison par rapport aux fonctions affines D'une manière générale, la dérivabilité d'une fonction f (à gauche, à droite, les deux) en a correspond au fait que f est équivalente à une fonction affine.

$$\exists L, lim_{x \to x0, x < x0} \frac{f(x) - f(x0)}{x - x0} = L \Leftrightarrow \exists L, f(x) - f(x0) \sim_{x0^-} L(x - x0)$$

$$\exists L, lim_{x \to x0, x > x0} \frac{f(x) - f(x0)}{x - x0} = L \Leftrightarrow \exists L, f(x) - f(x0) \sim_{x0^+} L(x - x0)$$

$$\exists L, lim_{x\to x0}\frac{f(x)-f(x0)}{x-x0}=L \Leftrightarrow \exists L, f(x)-f(x0)\sim_{x0} L(x-x0)$$

De plus (sans distinguer les dérivées à gauche ou à droite par simplicité), la divergence du taux d'accroissement (vers -∞ ou $+\infty$) correspond à la négligeabilité de f devant une fonction affine, et une dérivée nulle à la prépondérance de f devant une fonction affine :

$$f \textit{ non dérivable en } x0 \textit{ (par divergence du taux d' accroissement vers } +\infty \textit{ ou } -\infty) \Leftrightarrow (x-x0)=o_{x0}(f(x)-f(x0))$$

$$f \textit{ dérivable en } x0 \textit{ et } f'(x0)=0 \ \Leftrightarrow (f(x)-f(x0))=o_{x0}(x-x0)$$

Dérivabilité en $+\infty$: cas de (arctan, arctan) Dans (arctan,arctan), les fonctions usuelles paraissaient en $(+\infty,+\infty)$ selon : dérivables de dérivée non nulle (exemple : la fonction identité), dérivables de dérivée nulle (exemple : la fonction exponentielle) ou non dérivables par divergence du taux d'accroissement (vers $+\infty$ ou $-\infty$) (exemple : le logarithme népérien). La disjonction de cas correspond également à celle des fonctions équivalentes à une constante multiplicative près à la fonction identité, prépondérante devant la fonction identité ou négligeable devant la fonction identité ($en+\infty$). Est-ce que le lien entre l'aspect dérivable et les comparaisons par rapport aux fonctions affines est attendu ? Prolongeons les graphes par continuité géométrique en $(+\infty,+\infty)$ et étudions la dérivabilité géométrique.

Pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$, $arctan(f(x))+arctan(\frac{1}{f(x)})=signe(x)\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

$$arctan(f(x))=\frac{\pi}{2}-arctan(\frac{1}{f(x)})$$

,
si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$, d'où (developpement limité) :

$$arctan(f(x))=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{f(x)}+o_{x\to+\infty}(\frac{1}{f(x)})$$

la dérivée géométrique du graphe en $(+\infty,+\infty)$ s'écrit :

$$lim_{u\to+\infty}(Graphe)=lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-arctan(f(x))}{\frac{\pi}{2}-arctan(x)}$$

or :

$$\frac{\frac{\pi}{2}-arctan(f(x))}{\frac{\pi}{2}-arctan(x)}=\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{f(x)}+o_{x\to+\infty}(\frac{1}{f(x)}))}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}+o_{x\to+\infty}(\frac{1}{x})}=\frac{\frac{1}{f(x)}+o_{x\to+\infty}(\frac{1}{f(x)}))}{\frac{1}{x}+o_{x\to+\infty}(\frac{1}{x})}$$
$$=\frac{x}{f(x)}\times\frac{1+o_{x\to+\infty}(1)}{1+o_{x\to+\infty}(1)}=\frac{x}{f(x)}a(x)$$

avec $lim_{x\to+\infty}a(x)=1$

On en déduit : soit f une fonction divergeant vers $(+\infty,+\infty)$, définie au voisinage de $+\infty$.

f est prépondérante devant id : $x\to x$ en $+\infty$ ssi sa dérivée première à gauche de $+\infty$ au sens de (arctan, arctan) est égale à 0.

f est négligeable devant id en $+\infty$ ssi elle n'admet pas de dérivée à gauche de $+\infty$ par divergence du taux d'accroissement vers $+\infty$ ou $-\infty$ au sens de (arctan, arctan) .

f est équivalente à la constante multiplicative a près à id en $+\infty$ ssi sa dérivée à gauche de $+\infty$ au sens de (arctan, arctan) est égale à a.

Dès lors, la lecture des dérivées des fonctions usuelles en $(+\infty,+\infty)$ était valable, et elle traduisait une comparaison asymptotique des fonctions par rapport à la fonction identité.

Remarque : il est clair que pour définir la dérivée en $+\infty$, il a d'abord fallu prolonger le graphe par continuité. De plus, "au sens de" signifie que la dérivée est comprise de manière géométrique, et donc "au sens" de l'aspect défini dans la représentation usuelle i.e., analytiquement, avec la dérivée classique sur la fonction usuelle-équivalente prolongée par continuité en $(lim_{x\to+\infty}u^{-1}(x), lim_{x\to+\infty}u^{-1}(x))$ (ici $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$). Les fonctions d'aspect affine qui font office de tangentes sont les fonctions $x \to tan(arctan(x)a + \frac{\pi}{2}(1-a))$ ou a est le coefficient directeur vérifiant nécessairement a > 0.